



## ANÁLISE DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA REATORES COM COMBUSTÍVEL LÍQUIDO CIRCULANTE

Rodrigo Costa Diniz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientador: Alessandro da Cruz Gonçalves

Rio de Janeiro  
Março de 2018

ANÁLISE DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA REATORES  
COM COMBUSTÍVEL LÍQUIDO CIRCULANTE

Rodrigo Costa Diniz

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
NUCLEAR.

Examinada por:

---

Prof. Alessandro da Cruz Gonçalves, D. Sc.

---

Prof. Aquilino Senra Martinez, D. Sc.

---

Prof. Felipe Siqueira de Souza da Rosa, D. Sc.

---

Prof. Zelmo Rodrigues de Lima, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2018

Diniz, Rodrigo Costa

Análise das Equações da Cinética Pontual para Reatores com Combustível Líquido Circulante/Rodrigo Costa Diniz. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

X, 54 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Alessandro da Cruz Gonçalves

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Nuclear, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 44-45.

1. Física de Reatores. 2. Cinética Pontual. 3. Combustível Circulante. 4. Molten Salt Reactor. I. Gonçalves, Alessandro da Cruz. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

## ANÁLISE DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA REATORES COM COMBUSTÍVEL LÍQUIDO CIRCULANTE

Rodrigo Costa Diniz

Março/2018

Orientador: Alessandro da Cruz Gonçalves

Programa: Engenharia Nuclear

A circulação de um combustível líquido é um conceito inovador de alguns reatores nucleares de quarta geração, como o reator a sal fundido (*molten salt reactor* - MSR), cujos alguns dos objetivos principais são o aumento da segurança e a diminuição (ou reuso) de rejeitos radioativos. A circulação do combustível introduz fenômenos hidrodinâmicos no sistema, necessitando, assim, de mudanças nos modelos físicos do reator para considerar esses fenômenos. Nesta dissertação é analisada a influência da velocidade de escoamento no sistema, tanto no caso estacionário quanto em transientes, e as alterações que isso causa nas equações da cinética pontual. Uma solução semi-analítica é obtida para um caso simples do sistema estacionário e usada para se estudar o comportamento do fluxo de nêutrons, concentração de precursores e fator de multiplicação do sistema em função da velocidade de escoamento, além de servir como validação para o método numérico a ser utilizado para os casos mais gerais. As equações da cinética pontual são deduzidas utilizando-se uma metodologia análoga à usada no caso comum de combustível sólido, e suas soluções são comparadas com as da cinética espacial para alguns tipos de transientes, a fim de avaliar as limitações do modelo proposto.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

## ANALYSIS OF POINT KINETICS EQUATIONS FOR REACTORS WITH CIRCULATING FLUID FUEL

Rodrigo Costa Diniz

March/2018

Advisor: Alessandro da Cruz Gonçalves

Department: Nuclear Engineering

The circulation of a fluid fuel is an innovative concept of a few fourth-generation nuclear reactors, such as the molten salt reactor, whose main objectives are to increase safety and reduce (or reuse) radioactive waste. The circulation of the fuel introduces hydrodynamic phenomena into the system, thus demanding changes in the physical models of the reactor to consider these phenomena. In this work, the influence of the flow velocity in the system, both in the transient and steady state, is analyzed, as well as the changes that this causes in the point kinetics equations. A semi-analytical solution is obtained for a simple case of the stationary system and is used to study the behavior of neutron flux, precursor concentration and multiplication factor of the system as a function of the flow velocity, and also serving as validation for the numerical method to be used for the general case. The point kinetics equations are derived using a methodology analogous to the one used for the common case of solid fuel, and their solutions are compared with those of spatial kinetics for some types of transient, in order to evaluate the limitations of the proposed model.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Resumo do Cenário Atual da Energia Nuclear . . . . .	1
1.2	Reator a Sal Fundido . . . . .	2
1.3	Organização do Texto . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Equações para o Sistema Estacionário</b>	<b>5</b>
2.1	Modelo Matemático para Combustível Líquido Circulante . . . . .	5
2.2	Solução Semi-Analítica para um Caso Simples . . . . .	8
2.3	Influência da Velocidade de Escoamento no Sistema . . . . .	10
2.4	Solução Numérica por Diferenças Finitas . . . . .	12
2.5	Validação do Método Numérico . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Equações da Cinética Espacial</b>	<b>17</b>
3.1	Solução Numérica . . . . .	17
3.1.1	Semi-discretização da Variável Espacial . . . . .	18
3.1.2	Integração Numérica no Tempo . . . . .	20
3.2	Validação do Método Numérico . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Equações da Cinética Pontual</b>	<b>23</b>
4.1	Definição das Variáveis Adjuntas . . . . .	23
4.2	Dedução das Equações da Cinética Pontual . . . . .	25
4.3	Aproximação de <i>Prompt-Jump</i> e Solução Analítica . . . . .	29
4.4	Solução Numérica . . . . .	31
4.5	Validação do Método Numérico . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>33</b>
5.1	Perturbação na Seção de Choque de Fissão . . . . .	33
5.2	Perturbação na Velocidade de Escoamento . . . . .	37
5.3	Transientes na Aproximação de <i>Prompt-Jump</i> . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>43</b>

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>44</b>
<b>A Solução Trivial do Caso Estacionário</b>	<b>46</b>
<b>B Dados Numéricos</b>	<b>51</b>
B.1 Dados Usados no Capítulo 2 . . . . .	51
B.2 Dados da Validação Numérica do Capítulo 3 . . . . .	51
B.3 Dados da Validação Numérica do Capítulo 4 . . . . .	52
B.4 Dados Usados nos Resultados do Capítulo 5 . . . . .	53
B.5 Dados da Solução Trivial do Apêndice A . . . . .	54

# Lista de Figuras

1.1	Exemplo esquemático de um reator a sal fundido (Fonte: <i>US - Department of Energy - Nuclear Energy Research - Advisory Committee</i> , adaptado) . . .	2
2.1	Representação do reator unidimensional: núcleo de comprimento $H$ e tubulação externa de comprimento total $L$ (Fonte: <i>Chalmers University of Technology</i> , adaptado) . . . . .	7
2.2	Fluxo e concentração de precursores para diferentes valores da velocidade de escoamento (normalização dos fluxos: $\max(\phi(z)) = 1; [u] = [cm/s]$ ) . . .	10
2.3	Reatividade, em pcm, em função do logaritmo decimal da velocidade de escoamento, em $cm/s$ . . . . .	11
3.1	Falso transiente para velocidades de 1, 10, 100 e 1000 $cm/s$ . . . . .	22
5.1	Transiente pela perturbação na seção de choque macroscópica de fissão ( $u = 1 cm/s$ ) . . . . .	34
5.2	Transiente pela perturbação na seção de choque macroscópica de fissão ( $u = 10 cm/s$ ) . . . . .	34
5.3	Transiente pela perturbação na seção de choque macroscópica de fissão ( $u = 100 cm/s$ ) . . . . .	35
5.4	Fenômeno de patamares de potência constante na cinética pontual, para velocidade de 100 $cm/s$ . . . . .	36
5.5	Transiente pela perturbação na seção de choque macroscópica de fissão ( $u = 1000 cm/s$ ) . . . . .	36
5.6	Transiente pela perturbação na velocidade: $\Delta u = \pm 0.01 u_0, u_0 = 1 cm/s$ . Curvas crescentes: $\Delta u$ negativo. Curvas decrescentes: $\Delta u$ positivo . . . . .	37
5.7	Transiente pela perturbação na velocidade: $\Delta u = \pm 0.1 u_0, u_0 = 1 cm/s$ . Curvas crescentes: $\Delta u$ negativo. Curvas decrescentes: $\Delta u$ positivo . . . . .	38
5.8	Transiente pela perturbação na velocidade: $\Delta u = \pm 0.01 u_0, u_0 = 10 cm/s$ . Curvas crescentes: $\Delta u$ negativo. Curvas decrescentes: $\Delta u$ positivo . . . . .	39
5.9	Transiente pela perturbação na velocidade: $\Delta u = \pm 0.1 u_0, u_0 = 10 cm/s$ . Curvas crescentes: $\Delta u$ negativo. Curvas decrescentes: $\Delta u$ positivo . . . . .	39



5.10	Transiente pela perturbação na velocidade: $\Delta u = \pm 0.01 u_0$ , $u_0 = 100 \text{ cm/s}$ . Curvas magenta e ciano: $\Delta u$ negativo. Curvas vermelha e azul: $\Delta u$ positivo	40
5.11	Transiente pela perturbação na velocidade: $\Delta u = \pm 0.1 u_0$ , $u_0 = 100 \text{ cm/s}$ . Curvas magenta e ciano: $\Delta u$ negativo. Curvas vermelha e azul: $\Delta u$ positivo	40
5.12	Cinética pontual com (curva azul) e sem (curva vermelha) aproximação <i>prompt-jump</i> . . . . .	41
A.1	Gráficos do módulo de $f(k)$ para $u = 1 \text{ cm/s}$ , $u = 10 \text{ cm/s}$ e $u = 100 \text{ cm/s}$	49

# Lista de Tabelas

2.1	Erro relativo máximo, em %, entre soluções analítica e numérica do sistema estacionário ( $[u] = [cm/s]$ ) . . . . .	16
4.1	Erro relativo máximo, em %, entre soluções analítica e numérica da cinética pontual . . . . .	32
A.1	Determinante $f_0$ . . . . .	49
B.1	Parâmetros usados no Capítulo 2 . . . . .	51
B.2	Parâmetros usados no Capítulo 3 . . . . .	51
B.3	Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4: $u = 0.1 cm/s$ .	52
B.4	Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4: $u = 1 cm/s$ . .	52
B.5	Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4: $u = 10 cm/s$ .	52
B.6	Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4: $u = 100 cm/s$ .	52
B.7	Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4: $u = 1000 cm/s$	52
B.8	Parâmetros geométricos e numéricos usados no Capítulo 5 . . . . .	53
B.9	Parâmetros nucleares usados nos casos monoenergéticos do Capítulo 5	53
B.10	Parâmetros dos precursores usados nos casos multigrupo do Capítulo 5	53
B.11	Seções de choque macroscópicas de espalhamento e remoção, em $cm^{-1}$ , usadas nos casos multigrupo do Capítulo 5 . . . . .	53
B.12	Outros parâmetros nucleares usados nos casos multigrupo do Capítulo 5	54
B.13	Parâmetros usados no Apêndice A . . . . .	54

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Resumo do Cenário Atual da Energia Nuclear

Nas últimas décadas tem-se discutido bastante a aceitação pública da energia nuclear, principalmente no que diz respeito ao armazenamento e gerenciamento dos rejeitos nucleares, que são gerados em todas as etapas do ciclo de combustível. Os rejeitos de alta atividade são constituídos de produtos de fissão e elementos transurânicos, gerados no núcleo do reator, e podem ter uma meia-vida de milhares de anos. Nas usinas do complexo de Angra, estes rejeitos ficam armazenados em piscinas especiais dentro dos prédios de segurança das usinas. Tais rejeitos podem ser reaproveitados no futuro, depois de serem reprocessados.

Ao longo de sua história, o setor nuclear vem aperfeiçoando os processos de minimização de geração, tratamento e isolamento dos rejeitos, e está prestes a vencer o grande desafio de encurtar a meia-vida desses materiais de alta atividade. A solução vem da nova geração de reatores que estão sendo desenvolvidos, e que prometem reduzir consideravelmente o tempo de vida dos rejeitos radioativos usando, por exemplo, o processo de transmutação. Com o cenário atual da tecnologia nuclear pode-se afirmar que a energia nuclear é cada vez mais compatível com as metas de desenvolvimento sustentável.

Reatores de quarta geração são modelos de reatores nucleares atualmente em desenvolvimento para aplicações comerciais, com foco no aumento da segurança e na diminuição de rejeitos radioativos, além de melhorias em sustentabilidade, eficiência e custo. Alguns tipos de reatores dessa geração são: reator de alta temperatura resfriado a gás (*high-temperature gas-cooled reactor* - HTGR), reator a sal fundido (*molten salt reactor* - MSR), reator refrigerado a água supercrítica (*supercritical-water-cooled reactor* - SCWR), reator rápido refrigerado a gás (*gas-cooled fast reactor* - GFR), reator rápido refrigerado a sódio (*sodium-cooled fast reactor* - SFR) e reator rápido refrigerado a chumbo (*lead-cooled fast reactor* - LFR).

## 1.2 Reator a Sal Fundido

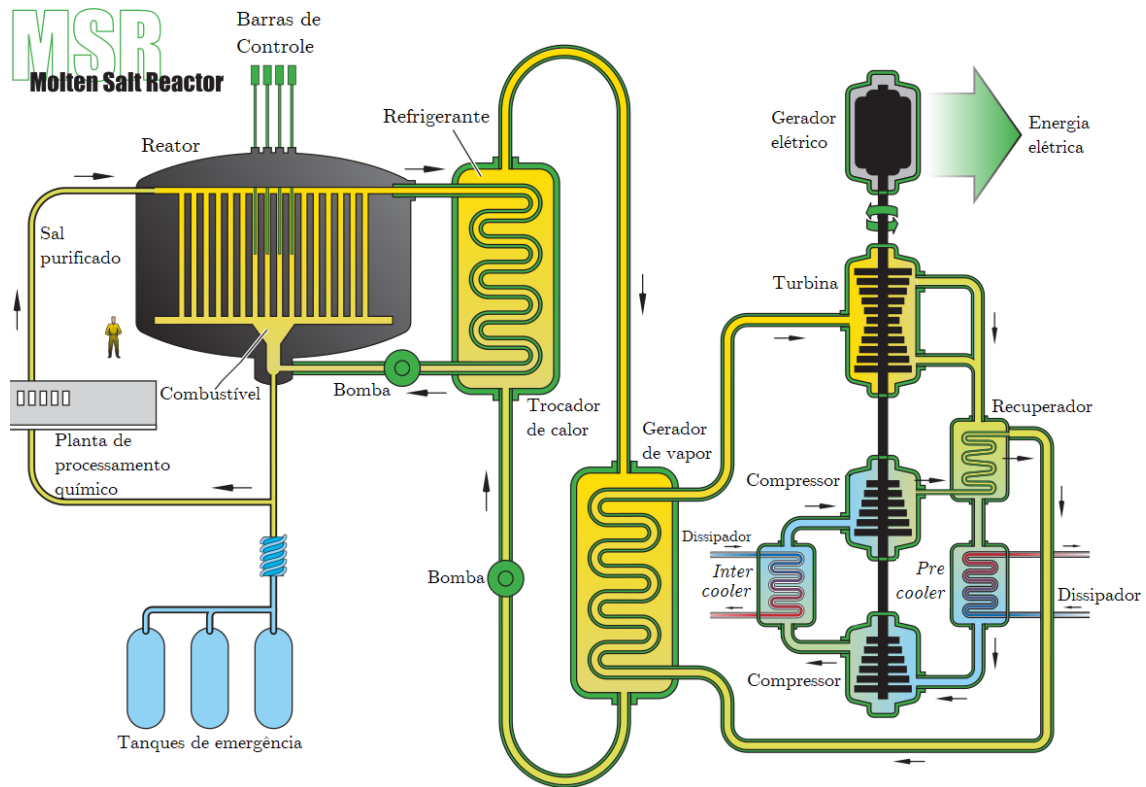


Figura 1.1: Exemplo esquemático de um reator a sal fundido (Fonte: *US - Department of Energy - Nuclear Energy Research - Advisory Committee*, adaptado)

O reator a sal fundido, esquematizado na figura 1.1, é um dos reatores nucleares de quarta geração. A sua característica mais marcante é seu combustível líquido e dissolvido no refrigerante, composto de uma mistura de sais fundidos que aumentam a capacidade de refrigeração. Até hoje, três reatores MSR construídos atingiram a criticidade:

- *Aircraft Reactor Experiment* (ARE) 1947 - 1951 [1]: combustível formado por  $\text{NaF-ZrF}_4\text{-}^{235}\text{UF}_4$  (53-41-6 mol%), moderado por óxido de berílio ( $\text{BeO}$ ) e sódio líquido como segundo refrigerante. Potência térmica de 2.5 MW.
- *Pratt and Whitney Aircraft Reactor-1* (PWAR-1) 1957 [1]: segundo MSR a atingir a criticidade, possuía o mesmo combustível do ARE, porém operou à potência quase zero e apenas durante algumas semanas.
- *Molten-Salt Reactor Experiment* (MSRE) 1964 - 1969 [2]: combustível formado por  $\text{LiF-BeF}_2\text{-ZrF}_4\text{-UF}_4$  (65-29-5-1 mol%), moderado por grafite e  $2\text{LiF-BeF}_2$  como refrigerante secundário. Potência térmica de 7.4 MW. Foram usados

como combustível tanto urânio-235 quanto urânio-233, este último sendo resultado da produção por tório em outros reatores.

Apesar de esses reatores terem existido há décadas, o aumento de pesquisa em reatores de quarta geração renovou o interesse neste tipo de tecnologia nos últimos anos. Entre suas vantagens está a capacidade de operar no espectro térmico, epitérmico ou rápido da energia dos nêutrons, possibilitando a redução e reutilização de combustíveis gastos, inclusive se operado na faixa térmica [3].

O combustível líquido altera significativamente a neuttrônica do reator, necessitando, assim, de uma modelagem física e matemática diferente do combustível sólido clássico, o que leva a fenômenos únicos e interessantes a acontecerem. O estudo da neuttrônica desse tipo de combustível torna-se necessária para o desenvolvimento do MSR e de outros reatores que venham a utilizar combustíveis líquidos.

### 1.3 Organização do Texto

O principal objetivo desta dissertação consiste na análise do comportamento cinético de reatores com combustível líquido circulante. Como a circulação do fluido altera consideravelmente a física do problema, deve-se levar em conta o escoamento do combustível para obter modelos que aproximem-se da realidade.

Um modelo de cinética pontual foi desenvolvido por LAPENTA *et al.* [4], na qual se utiliza a mesma metodologia de HENRY [5] para a obtenção dessas equações. No entanto, há limitações para esse modelo, devido algumas aproximações usadas. Nesta dissertação, procura-se identificar os limites do modelo proposto, bem como avaliar possíveis caminhos para aperfeiçoá-lo.

Inicialmente, é interessante estudar os casos mais simples de um combustível líquido para se analisar o comportamento das variáveis em função dos parâmetros novos, bem como para tentar se obter soluções analíticas ou semi-analíticas. Após isso, as equações da cinética espacial são resolvidas para alguns tipos de transientes, a fim de serem comparadas com a solução da cinética pontual para avaliar as limitações dessa aproximação.

No capítulo 2, é estudado o sistema estacionário de um núcleo com combustível líquido, explicando-se as mudanças na modelagem matemática, em relação ao caso de combustível sólido, e obtendo-se solução semi-analítica para um caso simples. Para os casos mais gerais, é proposto um método numérico para a solução. É também analisado a influência do escoamento do fluido sobre as variáveis do sistema.

No capítulo 3, as equações da cinética espacial são apresentadas e resolvidas numericamente. Também é feita uma validação do método numérico utilizado pelo método do falso transiente [6].

No capítulo 4, as equações da cinética pontual são obtidas a partir da cinética espacial e das equações adjuntas [7]. Uma solução analítica é obtida [8] para a aproximação de *prompt-jump* [9], e utilizada para a validação do método numérico usado para o caso geral.

No capítulo 5 são apresentados os resultados da comparação entre a cinética espacial e a pontual, exibindo os fenômenos que ocorrem devido ao escoamento do combustível e as limitações do modelo proposto por LAPENTA *et al.* [4]. Uma análise da aproximação de *prompt-jump* na cinética pontual também é feita.

No capítulo 6 é feita a discussão dos resultados e as conclusões obtidas, além de propor possibilidades de trabalhos futuros.

Por fim, no Apêndice A demonstra-se a solução trivial do caso estacionário, enquanto que no Apêndice B são apresentados os dados utilizados nos cálculos dos capítulos anteriores.

# Capítulo 2

## Equações para o Sistema Estacionário

### 2.1 Modelo Matemático para Combustível Líquido Circulante

Em um reator no qual o combustível é líquido e circulante, o escoamento do combustível influencia na distribuição dos nêutrons no núcleo. Esse efeito se manifesta nas equações dos precursores, que passam a ter um termo relativo ao escoamento para considerar o deslocamento dos precursores junto com o fluido, cuja velocidade é determinada pelo sistema (bombas de circulação). O termo convectivo pode ser obtido substituindo-se a derivada temporal pela derivada material nas equações dos precursores:

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{DC_i(\mathbf{r}, t)}{Dt} \equiv \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

na qual  $\mathbf{u}$  é a velocidade de escoamento do sistema. O caso de combustível sólido é recuperado ao tomar o limite  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ . No caso unidimensional, a velocidade  $u$  possui componente apenas no eixo  $z$  e é considerada constante. Assim, o termo convectivo fica:

$$\frac{\partial C_i(z, t)}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial C_i(z, t)}{\partial t} + u \frac{\partial C_i(z, t)}{\partial z} \quad (2.2)$$

No caso homogêneo, unidimensional e sem fonte externa de nêutrons, as equações da cinética espacial, para  $G$  grupos de energia e  $I$  grupos de precursores, são dadas por [4]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = D_g \frac{\partial^2 \phi_g}{\partial z^2} - \Sigma_{R,g} \phi_g + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'} \\ + (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'} + \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_i \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -u \frac{\partial C_i}{\partial z} - \lambda_i C_i + \beta_i \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'} \quad (2.3b)$$

na qual:

- $g$ : grupo de energia dos nêutrons, com intervalo de 1 a  $G$
- $i$ : grupo da família de precursores, com intervalo de 1 a  $I$
- $\phi_g$ : fluxo de nêutrons com energia no grupo  $g$
- $C_i$ : concentração de precursores do grupo  $i$
- $D_g$ : coeficiente de difusão do grupo de energia  $g$
- $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}$ : seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo  $g'$  para  $g$
- $\Sigma_{R,g}$ : seção de choque macroscópica de remoção do grupo  $g$  (absorção e espalhamento do grupo  $g$  para outros grupos)
- $\Sigma_{f,g}$ : seção de choque macroscópica de fissão do grupo  $g$
- $\nu_g$ : número médio de nêutrons emitidos por fissão causada por um nêutron do grupo  $g$
- $\chi_g$ : espectro de fissão de nêutrons do grupo  $g$
- $\chi_{i,g}$ : espectro dos nêutrons no grupo de energia  $g$  emitidos pelo decaimento de um precursor do grupo  $i$
- $\lambda_i$ : constante de decaimento dos precursores do grupo  $i$
- $\beta_i$ : fração de nêutrons emitidos pelo decaimento dos precursores do grupo  $i$  ( $\sum_{i=1}^I \beta_i = \beta$ )
- $v_g$ : velocidade dos nêutrons do grupo  $g$
- $u$ : velocidade de escoamento do combustível
- $\sum_{g' \neq g}^G$ : somatório em  $g'$  de 1 até  $G$ , sem o termo na qual  $g' = g$

As condições iniciais e de contorno são dadas por:

$$\phi_g(0, t) = 0 = \phi_g(H, t) \quad (2.4a)$$

$$\phi_g(z, 0) = \phi_g^0(z) \quad (2.4b)$$

$$C_i(0, t) = C_i(H, t - \tau) \xi_i \quad (2.4c)$$

$$C_i(z, 0) = C_i^0(z) \quad (2.4d)$$



sendo  $\xi_i \equiv e^{-\lambda_i \tau}$ . A condição de contorno para os precursores é relativa à reentrada ( $z = 0$ ), no instante  $t$ , dos precursores que saíram do núcleo ( $z = H$ ), em um instante anterior  $t - \tau$ , e que não decaíram ( $e^{-\lambda_i \tau}$ ) durante o tempo de trânsito  $\tau$  na tubulação de comprimento  $L$  ( $\tau = L/u$ ). Considera-se que não ocorrem fissões na tubulação, seja pela geometria da tubulação na qual há mais fuga de nêutrons, seja pela ausência de elementos moderadores. A figura 2.1 apresenta o modelo de reator utilizado.

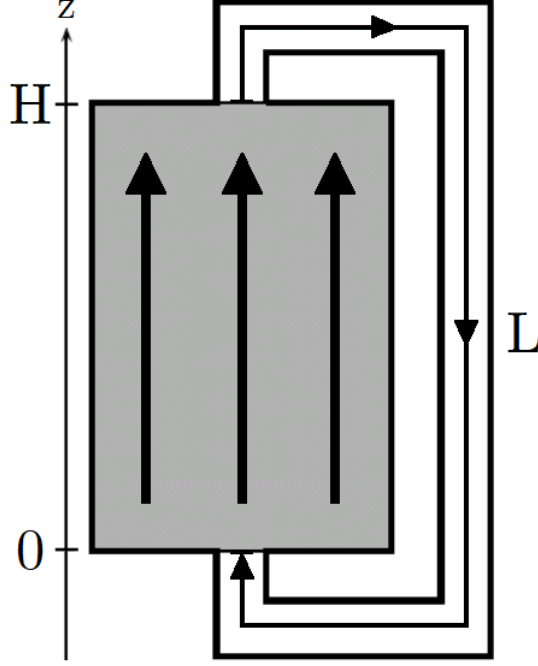


Figura 2.1: Representação do reator unidimensional: núcleo de comprimento  $H$  e tubulação externa de comprimento total  $L$  (Fonte: *Chalmers University of Technology*, adaptado)

As condições iniciais  $\phi_g^0(z)$  e  $C_i^0(z)$  são calculadas pela solução do sistema estacionário. As equações do fluxo e dos precursores para o sistema estacionário são obtidas ao se zerar as derivadas temporais nas equações (2.3a) e (2.3b), e dividir  $\nu$  pelo fator de multiplicação (autovalor)  $k$ :

$$\frac{1}{k}(1 - \beta)\chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu\Sigma_{f,0})_{g'} \phi_{g'}^0 = -D_{g,0} \frac{d^2 \phi_g^0}{dz^2} + \Sigma_{R,g,0} \phi_g^0 - \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g,0} \phi_{g'}^0 - \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_i^0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{1}{k} \beta_i \sum_{g'=1}^G (\nu\Sigma_{f,0})_{g'} \phi_{g'}^0 = u_0 \frac{dC_i^0}{dz} + \lambda_i C_i^0 \quad (2.5b)$$

e as condições de contorno ficam:

$$\phi_g^0(0) = 0 = \phi_g^0(H) \quad (2.6a)$$

$$C_i^0(0) = C_i^0(H) \xi_{i,0} \quad (2.6b)$$

Os valores iniciais dos parâmetros são indicados pelo índice 0, para diferenciá-los dos parâmetros possivelmente perturbados no início do transiente ( $t = 0$ ). Os fluxos  $\phi_g^0(z)$  e os precursores  $C_i^0(z)$  iniciais são dados pelas autofunções das equações (2.5a) e (2.5b) respectivas ao maior autovalor, definido como  $k_{eff}$ , que representa a forma espacial assintótica do fluxo e dos precursores.

## 2.2 Solução Semi-Analítica para um Caso Simples

O caso mais simples que pode ser analisado é para nêutrons monoenergéticos e com apenas um grupo de precursores. Assim, as equações (2.5a) e (2.5b) se simplificam para:

$$-D \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \Sigma_a \phi - \lambda C = \frac{1}{k} (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi \quad (2.7a)$$

$$u \frac{dC}{dz} + \lambda C = \frac{1}{k} \beta \nu \Sigma_f \phi \quad (2.7b)$$

Isolando o precursor na equação (2.7a) e substituindo na equação (2.7b), obtém-se a seguinte equação apenas para o fluxo:

$$\frac{d^3 \phi}{dz^3} + \frac{\lambda}{u} \frac{d^2 \phi}{dz^2} + B^2(k) \frac{d\phi}{dz} + \frac{\lambda}{u} B_m^2(k) \phi = 0 \quad (2.8)$$

A condição de contorno dos precursores pode ser transformada em uma condição para o fluxo, resultando, assim, nas seguintes condições de contorno para a equação diferencial (2.8):

$$\phi(0) = 0 = \phi(H) \quad (2.9a)$$

$$\left. \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right|_{z=0} = \xi \left. \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right|_{z=H} \quad (2.9b)$$

na qual:

$$B_m^2(k) \equiv \frac{\nu \Sigma_f / k - \Sigma_a}{D} \quad (2.10a)$$

$$B^2(k) \equiv \frac{(1 - \beta) \nu \Sigma_f / k - \Sigma_a}{D} \quad (2.10b)$$

$$\xi \equiv e^{-\lambda \tau} \quad (2.10c)$$

Na equação (2.8), pode-se ver que multiplicando os dois lados pela velocidade  $u$  e tomando o limite  $u \rightarrow 0$ , o caso de combustível sólido é recuperado:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + B_m^2(k) \phi = 0 \quad (2.11)$$

Assumindo uma forma exponencial para o fluxo ( $e^{rz}$ ), a equação característica relativa à equação diferencial (2.8) é:

$$r^3 + \frac{\lambda}{u}r^2 + B^2(k)r + \frac{\lambda}{u}B_m^2(k) = 0 \quad (2.12)$$

As raízes  $r_1, r_2$  e  $r_3$  estão em função de  $k$  e podem ser determinadas analiticamente [10] ou numericamente. O fluxo é dado por:

$$\phi(z) = A_1e^{r_1z} + A_2e^{r_2z} + A_3e^{r_3z} \quad (2.13)$$

Aplicando as condições de contorno, chega-se a um sistema:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad (2.14a)$$

$$A_1e^{r_1H} + A_2e^{r_2H} + A_3e^{r_3H} = 0 \quad (2.14b)$$

$$r_1^2A_1(1 - e^{r_1H}\xi) + r_2^2A_2(1 - e^{r_2H}\xi) + r_3^2A_3(1 - e^{r_3H}\xi) = 0 \quad (2.14c)$$

que possui a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{r_1H} & e^{r_2H} & e^{r_3H} \\ r_1^2(1 - e^{r_1H}\xi) & r_2^2(1 - e^{r_2H}\xi) & r_3^2(1 - e^{r_3H}\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Para que os coeficientes não sejam todos nulos, o determinante da matriz deve ser nulo, resultando, assim, na seguinte condição para o autovalor  $k$ :

$$f(k) = 0 \quad (2.16)$$

sendo:

$$\begin{aligned} f(k) \equiv & r_1^2(1 - e^{r_1H}\xi)(e^{r_3H} - e^{r_2H}) + r_2^2(1 - e^{r_2H}\xi)(e^{r_1H} - e^{r_3H}) \\ & + r_3^2(1 - e^{r_3H}\xi)(e^{r_2H} - e^{r_1H}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

As raízes da função  $f(k)$  definida acima são calculadas numericamente. No Apêndice A é mostrado que a maior raiz está associada a uma solução trivial, sendo então a segunda maior raiz definida como o fator de multiplicação efetivo  $k_{eff}$ , que está associado à forma espacial assintótica do fluxo.

Usando as equações (2.14a) e (2.14b), escreve-se os coeficientes  $A_2$  e  $A_3$  em função de  $A_1$ . Substituindo na expressão do fluxo (2.13), tem-se:

$$\phi(z) = \left[ (e^{r_2H} - e^{r_3H})e^{r_1z} + (e^{r_3H} - e^{r_1H})e^{r_2z} + (e^{r_1H} - e^{r_2H})e^{r_3z} \right] \frac{A_1}{e^{r_2H} - e^{r_3H}} \quad (2.18)$$

O coeficiente  $A_1$  é determinado pela potência nuclear:

$$P = \int_0^H w \Sigma_f \phi(z) dz \quad (2.19)$$

$$A_1 = \frac{P}{w\Sigma_f} \left[ e^{r_2 H} - e^{r_3 H} \right] A^{-1} \quad (2.20)$$

sendo:

$$A \equiv \frac{1}{r_1} \left( e^{r_2 H} - e^{r_3 H} \right) \left( e^{r_1 H} - 1 \right) + \frac{1}{r_2} \left( e^{r_3 H} - e^{r_1 H} \right) \left( e^{r_2 H} - 1 \right) + \frac{1}{r_3} \left( e^{r_1 H} - e^{r_2 H} \right) \left( e^{r_3 H} - 1 \right) \quad (2.21)$$

Dessa forma, a expressão para o fluxo de nêutrons fica:

$$\phi(z) = \frac{P}{w\Sigma_f} A^{-1} \left[ \left( e^{r_2 H} - e^{r_3 H} \right) e^{r_1 z} + \left( e^{r_3 H} - e^{r_1 H} \right) e^{r_2 z} + \left( e^{r_1 H} - e^{r_2 H} \right) e^{r_3 z} \right] \quad (2.22)$$

Substituindo o fluxo na equação (2.7a), obtém-se a expressão para a concentração de precursores:

$$C(z) = - \frac{PD}{\lambda w\Sigma_f} A^{-1} \left[ \left( e^{r_2 H} - e^{r_3 H} \right) \left( r_1^2 + B^2 \right) e^{r_1 z} + \left( e^{r_3 H} - e^{r_1 H} \right) \left( r_2^2 + B^2 \right) e^{r_2 z} + \left( e^{r_1 H} - e^{r_2 H} \right) \left( r_3^2 + B^2 \right) e^{r_3 z} \right] \quad (2.23)$$

## 2.3 Influência da Velocidade de Escoamento no Sistema

Com a solução analítica obtida na seção anterior, pode-se analisar como a velocidade de escoamento influencia nas variáveis do sistema: fluxo, concentração de precursores e fator de multiplicação. Os valores dos parâmetros utilizados encontram-se no Apêndice B.

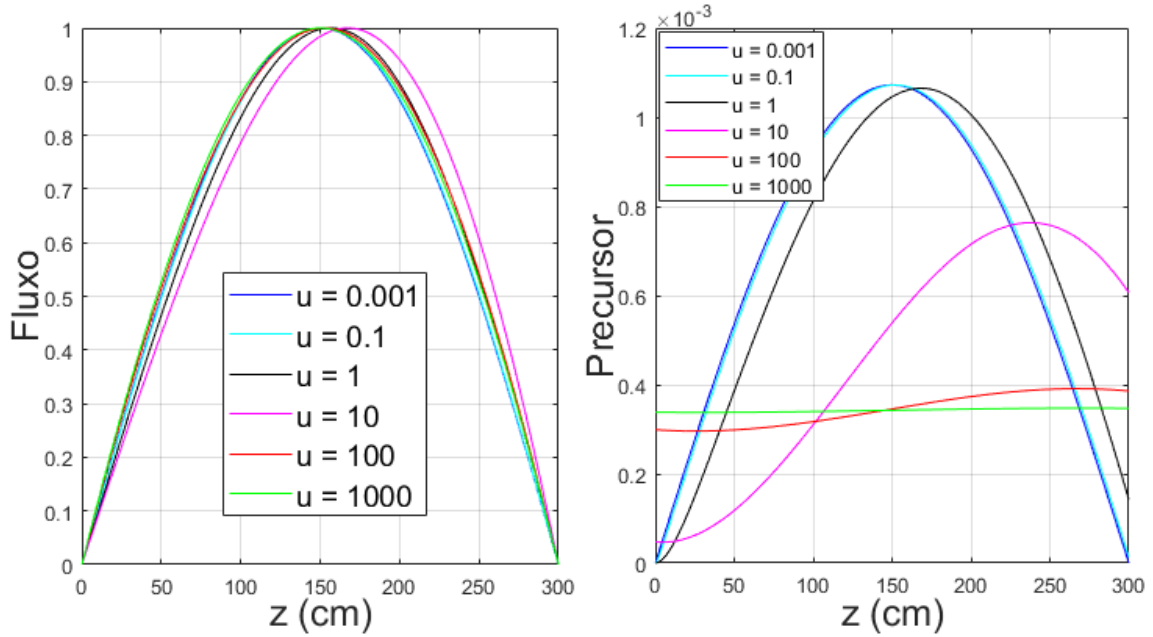


Figura 2.2: Fluxo e concentração de precursores para diferentes valores da velocidade de escoamento (normalização dos fluxos:  $\max(\phi(z)) = 1$ ;  $[u] = [cm/s]$ )

Pelos gráficos da figura 2.2, percebe-se que a forma espacial do fluxo não é tão afetada pela velocidade, mantendo sempre uma forma parecida com uma senoide. No entanto, a concentração de precursores tem a sua forma bastante alterada, partindo de uma senoide, para velocidade nula, e se deformando até ficar uma constante, quando a velocidade tende a infinito. A normalização utilizada ( $\max \phi(z) = 1$ ) é apenas para possibilitar uma melhor comparação entre as curvas, visto que o importante é a forma espacial delas.

Para analisar a influência da velocidade no fator de multiplicação ( $k_{eff}$ ), é mais prático usar a definição simplificada de reatividade em torno da criticalidade ( $\rho = 1 - 1/k_{eff}$ ), servindo como uma mudança de variáveis para uma escala mais prática de ser analisada.

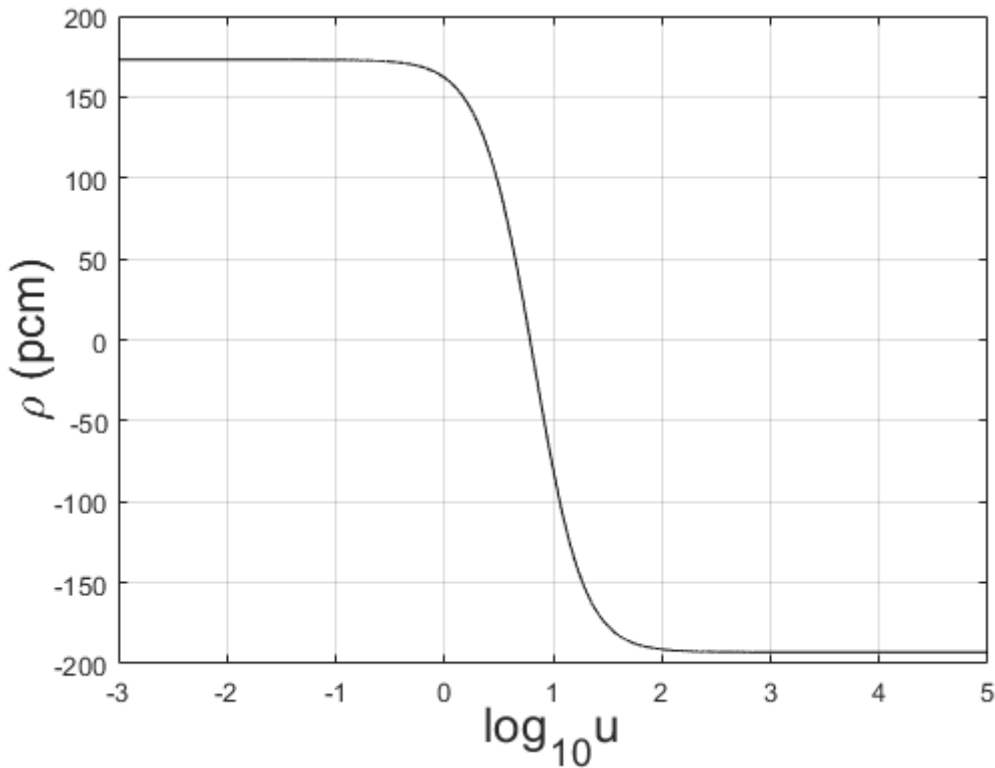


Figura 2.3: Reatividade, em pcm, em função do logaritmo decimal da velocidade de escoamento, em  $cm/s$

A curva mostrada na figura 2.3 se aproxima bastante de uma tangente hiperbólica. Assim, pode-se identificar alguns limites: velocidade nula:  $u \approx 10^{-1} cm/s$ ; velocidade infinita:  $u \approx 10^3 cm/s$ .

Constata-se que o aumento da velocidade causa uma perda de reatividade do sistema. Isso pode ser explicado pelo tempo que o precursor permanece dentro do núcleo entre sua produção pela fissão e sua subsequente saída pela fronteira. Enquanto que para baixas velocidades esse tempo é suficiente para que quase todos

os precursores decaíam dentro do núcleo, para velocidades entre 1 e 100  $cm/s$  esse tempo passa pela ordem de grandeza da vida média dos precursores, causando a queda brusca de reatividade nesse intervalo da velocidade devido ao maior decaimento fora do núcleo. Acima de 100  $cm/s$ , a perda de reatividade torna-se menos sensível ao aumento da velocidade, pois o tempo total de circulação do combustível passa a ser muito menor que a vida média dos precursores, chegando, assim, a um limite da reatividade.

## 2.4 Solução Numérica por Diferenças Finitas

As equações do sistema estacionário serão resolvidas numericamente pelo método de diferenças finitas centrado na interface [11], [12]. As derivadas são discretizadas da seguinte forma:

$$\left. \frac{d^2 \phi_g^0(z)}{dz^2} \right|_{z_j} \approx \frac{\phi_{g,j+1}^0 - 2\phi_{g,j}^0 + \phi_{g,j-1}^0}{\Delta z^2} \quad (2.24a)$$

$$\left. \frac{dC_i^0(z)}{dz} \right|_{z_j} \approx \frac{C_{i,j}^0 - C_{i,j-1}^0}{\Delta z} \quad (2.24b)$$

sendo:

$$z_j = j\Delta z \quad (2.25a)$$

$$\Delta z = H/N \quad (2.25b)$$

$$\phi_{g,j}^0 \equiv \phi_g^0(z_j) \quad (2.25c)$$

$$C_{i,j}^0 \equiv C_i^0(z_j) \quad (2.25d)$$

$$j = 0, \dots, N \quad (2.25e)$$

Substituindo essas aproximações nas equações do sistema estacionário (2.5a), (2.5b):

$$-\frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \phi_{g,j+1}^0 + \left[ \Sigma_{R,g,0} + 2\frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \right] \phi_{g,j}^0 - \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \phi_{g,j-1}^0 - \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g,0} \phi_{g',j}^0 - \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_{i,j}^0 = \frac{1}{k} (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \phi_{g',j}^0 \quad (2.26a)$$

$$\left[ \frac{u_0}{\Delta z} + \lambda_i \right] C_{i,j}^0 - \frac{u_0}{\Delta z} C_{i,j-1}^0 = \frac{1}{k} \beta_i \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \phi_{g',j}^0 \quad (2.26b)$$

As condições de contorno discretizadas ficam:

$$\phi_{g,0}^0 = 0 = \phi_{g,N}^0 \quad (2.27a)$$

$$C_{i,0}^0 = C_{i,N}^0 \xi_{i,0} \quad (2.27b)$$

Os intervalos dos índices  $g = 1, \dots, G$  e  $i = 1, \dots, I$  estarão implícitos nas próximas equações. As equações (2.26a) e (2.26b) valem para  $j = 1, \dots, N - 1$  e a equação (2.26b) pode ser avaliada em  $j = N$  para relacionar  $C_{i,N}^0$  com  $C_{i,N-1}^0$ :

$$\left[ \frac{u_0}{\Delta z} + \lambda_i \right] C_{i,N}^0 - \frac{u_0}{\Delta z} C_{i,N-1}^0 = 0 \quad (2.28)$$

$$C_{i,N}^0 = \frac{1}{1 + \lambda_i \Delta z / u_0} C_{i,N-1}^0$$

Em  $j = 1$ , usando as condições de contorno e a relação (2.28), as equações ficam:

$$-\frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \phi_{g,2}^0 + \left[ \Sigma_{R,g,0} + 2 \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \right] \phi_{g,1}^0 - \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g,0} \phi_{g',1}^0 \quad (2.29a)$$

$$- \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_{i,1}^0 = \frac{1}{k} (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \phi_{g',1}^0$$

$$\left[ \frac{u_0}{\Delta z} + \lambda_i \right] C_{i,1}^0 - \frac{u_0}{\Delta z} \frac{\xi_i}{1 + \lambda_i \Delta z / u} C_{i,N-1}^0 = \frac{1}{k} \beta_i \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \phi_{g',1}^0 \quad (2.29b)$$

Em  $j = N - 1$ , a equação (2.26a) fica:

$$\left[ \Sigma_{R,g,0} + 2 \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \right] \phi_{g,N-1}^0 - \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \phi_{g,N-2}^0 - \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g,0} \phi_{g',N-1}^0 \quad (2.30)$$

$$- \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_{i,N-1}^0 = \frac{1}{k} (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \phi_{g',N-1}^0$$

Dessa forma, pode-se representar as equações discretizadas na forma matricial:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_0 = \frac{1}{k} \mathbf{F} \boldsymbol{\psi}_0, \quad (2.31)$$

na qual  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$  são matrizes em blocos, de dimensão  $(G + I) \times (N - 1)$ , e  $\boldsymbol{\psi}_0$  é uma matriz coluna com os fluxos e precursores discretizados:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_1^0 + \mathbf{S}_{1,1}^0 & \cdots & \mathbf{S}_{1,G}^0 & -\mathbf{P}_{1,1}^f & \cdots & -\mathbf{P}_{1,I}^f \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{G,1}^0 & \cdots & -\mathbf{D}_G^0 + \mathbf{S}_{G,G}^0 & -\mathbf{P}_{G,1}^f & \cdots & -\mathbf{P}_{G,I}^f \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_1^0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{P}_I^0 \end{bmatrix} \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,1}^{f,0} & \cdots & \mathbf{F}_{1,G}^{f,0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{G,1}^{f,0} & \cdots & \mathbf{F}_{G,G}^{f,0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{1,1}^{p,0} & \cdots & \mathbf{F}_{1,G}^{p,0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{I,1}^{p,0} & \cdots & \mathbf{F}_{I,G}^{p,0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.32b)$$

$$\boldsymbol{\psi}_0 = \begin{bmatrix} \phi_1^0 \\ \vdots \\ \phi_G^0 \\ \mathbf{C}_1^0 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_I^0 \end{bmatrix}, \quad \phi_g^0 = \begin{bmatrix} \phi_{g,1}^0 \\ \vdots \\ \phi_{g,N-1}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i^0 = \begin{bmatrix} C_{i,1}^0 \\ \vdots \\ C_{i,N-1}^0 \end{bmatrix} \quad (2.32c)$$

e os blocos  $\mathbf{D}_g^0$ ,  $\mathbf{P}_i^0$ ,  $\mathbf{S}_{g,g'}^0$ ,  $\mathbf{P}_{g,i}^{f,0}$ ,  $\mathbf{F}_{g,g}^{f,0}$  e  $\mathbf{F}_{i,g'}^{p,0}$  são matrizes de dimensão  $(N-1)$ :

$$\mathbf{D}_g^0 \equiv \begin{bmatrix} -2\frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} & \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} & -2\frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} & \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} & -2\frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} & \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} & -2\frac{D_{g,0}}{\Delta z^2} \end{bmatrix} \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{P}_i^0 \equiv \begin{bmatrix} -\frac{u_0}{\Delta z} - \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{u_0}{\Delta z} \frac{\xi_{i,0}}{1 + \lambda_i \Delta z / u_0} \\ \frac{u_0}{\Delta z} & -\frac{u_0}{\Delta z} - \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{u_0}{\Delta z} & -\frac{u_0}{\Delta z} - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{u_0}{\Delta z} & -\frac{u_0}{\Delta z} - \lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.33b)$$

$$\mathbf{S}_{g,g'}^0 \equiv \begin{cases} \Sigma_{R,g,0} \mathbf{I}_{N-1} & \text{se } g = g' \\ -\Sigma_{s,g' \rightarrow g,0} \mathbf{I}_{N-1} & \text{se } g \neq g' \end{cases} \quad (2.33c)$$

$$\mathbf{P}_{g,i}^f \equiv \chi_{i,g} \lambda_i \mathbf{I}_{N-1} \quad (2.33d)$$

$$\mathbf{F}_{g,g'}^{f,0} \equiv (1 - \beta) \chi_g (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \mathbf{I}_{N-1} \quad (2.33e)$$

$$\mathbf{F}_{i,g'}^{p,0} \equiv \beta_i (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \mathbf{I}_{N-1} \quad (2.33f)$$



$\mathbf{I}_{N-1}$  é a matriz identidade de dimensão  $(N-1)$ ,  $\mathbf{0}$  é a matriz nula de dimensão  $(N-1)$  e os índices 0 indicam que as matrizes são para o caso estacionário.

A equação (2.31) pode ser reescrita como:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F})\boldsymbol{\psi}_0 = k\boldsymbol{\psi}_0 \quad (2.34)$$

sendo  $k$  o maior autovalor da matriz  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$  e  $\boldsymbol{\psi}_0$  o autovetor respectivo, e que podem ser calculados pelo método das potências ou por qualquer outro método numérico para calcular autovalores e autovetores de uma matriz.

Vale lembrar que o autovetor  $\boldsymbol{\psi}_0$  não contém os fluxos e os precursores avaliados nas fronteiras, os quais são dados pelas condições de contorno (2.27a), (2.27b) e pela relação (2.28):

$$\phi_{g,0}^0 = 0 \quad (2.35a)$$

$$\phi_{g,N}^0 = 0 \quad (2.35b)$$

$$C_{i,0}^0 = \frac{\xi_{i,0}}{1 + \lambda_i \Delta z / u_0} C_{i,N-1}^0 \quad (2.35c)$$

$$C_{i,N}^0 = \frac{1}{1 + \lambda_i \Delta z / u_0} C_{i,N-1}^0 \quad (2.35d)$$

Também é de interesse normalizar o autovetor  $\boldsymbol{\psi}_0$  de forma que a potência nuclear seja 1. A potência é dada por:

$$P_0 = \sum_{g=1}^G \int_0^H w_{\Sigma_{f,g,0}} \phi_g^0(z) dz \quad (2.36)$$

na qual  $w$  é a energia média liberada por fissão. Usando o método dos trapézios para calcular numericamente a integral, a expressão para a potência fica:

$$P_0 = \sum_{g=1}^G \sum_{j=1}^{N-1} w_{\Sigma_{f,g,0}} \phi_{g,j}^0 \quad (2.37)$$

Assim, a solução final do sistema estacionário é o autovetor  $\boldsymbol{\psi}_0/P_0$ , sendo o autovalor  $k$  definido como o fator de multiplicação efetivo.

## 2.5 Validação do Método Numérico

A validação do método numérico utilizado será feita pela comparação da solução numérica, dada pela seção anterior, com a solução analítica calculada na seção 2.2. Serão comparados os valores do fluxo  $\phi(z)$ , da concentração de precursores  $C(z)$ , e da reatividade  $\rho \equiv 1 - 1/k_{eff}$ . O erro máximo será calculado para diferentes velocidades de escoamento.

Definindo o erro relativo máximo:

$$erro = \max \left| \frac{X_{analítico} - X_{numérico}}{X_{analítico}} \right| \times 100\%, X = \phi(z), C(z), \rho \quad (2.38)$$

Tabela 2.1: Erro relativo máximo, em %, entre soluções analítica e numérica do sistema estacionário ( $[u] = [cm/s]$ )

	$u = 10^{-3}$	$u = 10^{-1}$	$u = 10^0$	$u = 10^1$	$u = 10^2$	$u = 10^3$
$\phi(z)$	$1.7 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-3}$	$4.1 \times 10^{-2}$	$6.0 \times 10^{-2}$	$4.7 \times 10^{-3}$	$4.0 \times 10^{-4}$
$C(z)$	$6.2 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-1}$	$5.9 \times 10^{-1}$	$3.3 \times 10^{-2}$	$3.5 \times 10^{-3}$
$\rho$	$5.7 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$9.3 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-1}$	$2.6 \times 10^{-2}$	$2.6 \times 10^{-3}$

Como o maior erro visto na tabela 2.1 é da ordem de décimos de por cento, conclui-se que a solução numérica obtida é bastante precisa. Os valores dos parâmetros utilizados para a validação do método numérico encontram-se no Apêndice B.

# Capítulo 3

## Equações da Cinética Espacial

### 3.1 Solução Numérica

Como foi visto no Capítulo 2, as equações da cinética espacial são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = & D_g \frac{\partial^2 \phi_g}{\partial z^2} - \Sigma_{R,g} \phi_g + (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'} \\ & + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'} + \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_i \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -u \frac{\partial C_i}{\partial z} - \lambda_i C_i + \beta_i \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'} \quad (3.1b)$$

com as condições iniciais e de contorno:

$$\phi_g(0, t) = 0 = \phi_g(H, t) \quad (3.2a)$$

$$\phi_g(z, 0) = \phi_g^0(z) \quad (3.2b)$$

$$C_i(0, t) = C_i(H, t - \tau) \xi_i \quad (3.2c)$$

$$C_i(z, 0) = C_i^0(z) \quad (3.2d)$$

e os intervalos dos índices são  $g = 1, \dots, G$  e  $i = 1, \dots, I$ , omitidos no restante do capítulo.

### 3.1.1 Semi-discretização da Variável Espacial

Discretizando apenas a variável espacial, da mesma forma que foi feito na seção 2.4, obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{d\phi_{g,j}}{dt} = & \frac{D_g}{\Delta z^2} \phi_{g,j+1} - \left[ \Sigma_{R,g} + 2 \frac{D_g}{\Delta z^2} \right] \phi_{g,j} + \frac{D_g}{\Delta z^2} \phi_{g,j-1} + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g',j} \\ & + (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g',j} + \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_{i,j} \end{aligned} \quad (3.3a)$$

$$\frac{dC_{i,j}}{dt} = - \left[ \frac{u}{\Delta z} + \lambda_i \right] C_{i,j} + \frac{u}{\Delta z} C_{i,j-1} + \beta_i \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g',j} \quad (3.3b)$$

sendo que os fluxos e precursores mantêm a dependência temporal. As condições de contorno discretizadas ficam:

$$\phi_{g,0}(t) = 0 = \phi_{g,N}(t) \quad (3.4a)$$

$$\phi_{g,j}(0) = \phi_{g,j}^0 \quad (3.4b)$$

$$C_{i,0}(t) = C_{i,N}(t - \tau) \xi_i \quad (3.4c)$$

$$C_{i,j}(0) = C_{i,j}^0 \quad (3.4d)$$

As equações (3.3a) e (3.3b) valem para  $j = 1, \dots, N - 1$ . Avaliando essas equações em  $j = 1$ , usando as condições de contorno e explicitando a dependência temporal:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{d\phi_{g,1}(t)}{dt} = & \frac{D_g}{\Delta z^2} \phi_{g,2}(t) - \left[ \Sigma_{R,g} + 2 \frac{D_g}{\Delta z^2} \right] \phi_{g,1}(t) + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g',1}(t) \\ & + (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g',1}(t) + \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_{i,1}(t) \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$\frac{dC_{i,1}(t)}{dt} = - \left[ \frac{u}{\Delta z} + \lambda_i \right] C_{i,1}(t) + \frac{u}{\Delta z} \xi_i C_{i,N}(t - \tau) + \beta_i \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g',1}(t) \quad (3.5b)$$

Na equação (3.5b), há um termo avaliado num instante anterior,  $C_{i,N}(t - \tau)$ , que pode ser considerado, por enquanto, como um termo fonte. Avaliando a equação (3.3b) em  $j = N$ , pode-se obter uma relação entre  $C_{i,N}$  e  $C_{i,N-1}$ :

$$\frac{dC_{i,N}(t)}{dt} = - \left[ \frac{u}{\Delta z} + \lambda_i \right] C_{i,N}(t) + \frac{u}{\Delta z} C_{i,N-1}(t) \quad (3.6)$$

Avaliando a equação (3.3a) em  $j = N - 1$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{d\phi_{g,N-1}(t)}{dt} = & - \left[ \Sigma_{R,g} + 2 \frac{D_g}{\Delta z^2} \right] \phi_{g,N-1}(t) + \frac{D_g}{\Delta z^2} \phi_{g,N-2}(t) + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g',N-1}(t) \\ & + (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g',N-1}(t) + \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_{i,N-1}(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Essas equações semi-discretizadas podem ser representadas na forma matricial:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt} = \mathbf{M}\boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{Q}(t - \tau) \quad (3.8)$$

na qual  $\mathbf{M}$  é uma matriz em blocos de dimensão  $(G + I) \times (N - 1)$ ,  $\boldsymbol{\psi}(t)$  é uma matriz coluna com os fluxos e precursores semi-discretizados e  $\mathbf{Q}(t - \tau)$  é uma matriz coluna que representa um termo fonte:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} v_1 (\mathbf{D}_1 + \mathbf{T}_{1,1}) & \cdots & v_1 \mathbf{T}_{1,G} & v_1 \mathbf{P}_{1,1}^f & \cdots & v_1 \mathbf{P}_{1,I}^f \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_G \mathbf{T}_{G,1} & \cdots & v_G (\mathbf{D}_G + \mathbf{T}_{G,G}) & v_G \mathbf{P}_{G,1}^f & \cdots & v_G \mathbf{P}_{G,I}^f \\ \mathbf{F}_{1,1}^p & \cdots & \mathbf{F}_{1,G}^p & \mathbf{P}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{I,1}^p & \cdots & \mathbf{F}_{I,G}^p & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P}_I \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_G(t) \\ \mathbf{C}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_I(t) \end{bmatrix}, \quad \phi_g(t) = \begin{bmatrix} \phi_{g,1}(t) \\ \vdots \\ \phi_{g,N-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_i(t) = \begin{bmatrix} C_{i,1}(t) \\ \vdots \\ C_{i,N-1}(t) \end{bmatrix} \quad (3.9b)$$

$$\mathbf{Q}(t - \tau) = \frac{u}{\Delta z} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \xi_1 \mathbf{C}_{1,N}(t - \tau) \\ \vdots \\ \xi_I \mathbf{C}_{I,N}(t - \tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{i,N}(t - \tau) = \begin{bmatrix} C_{i,N}(t - \tau) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9c)$$

e os blocos  $\mathbf{D}_g$ ,  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{T}_{g,g'}$ ,  $\mathbf{P}_{g,i}^f$  e  $\mathbf{F}_{i,g}^p$  são matrizes de dimensão  $(N - 1)$ :

$$\mathbf{D}_g \equiv \begin{bmatrix} -2\frac{D_g}{\Delta z^2} & \frac{D_g}{\Delta z^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D_g}{\Delta z^2} & -2\frac{D_g}{\Delta z^2} & \frac{D_g}{\Delta z^2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{D_g}{\Delta z^2} & -2\frac{D_g}{\Delta z^2} & \frac{D_g}{\Delta z^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{D_g}{\Delta z^2} & -2\frac{D_g}{\Delta z^2} \end{bmatrix} \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{P}_i \equiv \begin{bmatrix} -\frac{u}{\Delta z} - \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{\Delta z} & -\frac{u}{\Delta z} - \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{u}{\Delta z} & -\frac{u}{\Delta z} - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{u}{\Delta z} & -\frac{u}{\Delta z} - \lambda_i \end{bmatrix} \quad (3.10b)$$

$$\mathbf{T}_{g,g'} \equiv \begin{cases} \left[ (1 - \beta)\chi_g(\nu\Sigma_f)_g - \Sigma_{R,g} \right] \mathbf{I}_{N-1} & \text{se } g = g' \\ \left[ (1 - \beta)\chi_g(\nu\Sigma_f)_{g'} + \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \right] \mathbf{I}_{N-1} & \text{se } g \neq g' \end{cases} \quad (3.10c)$$

$$\mathbf{P}_{g,i}^f \equiv \chi_{i,g}\lambda_i \mathbf{I}_{N-1} \quad (3.10d)$$

$$\mathbf{F}_{i,g}^p \equiv \beta_i(\nu\Sigma_f)_{g'} \mathbf{I}_{N-1} \quad (3.10e)$$

### 3.1.2 Integração Numérica no Tempo

Para obter uma relação entre  $C_{i,N}(t)$  e  $C_{i,N-1}(t)$ , pode-se integrar numericamente a equação (3.6) usando o método de Euler implícito, que leva a uma expressão mais simples mas com precisão suficiente:

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dC_{i,N}(t)}{dt} dt &= - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \frac{u}{\Delta z} + \lambda_i \right] C_{i,N}(t) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{u}{\Delta z} C_{i,N-1}(t) dt \\ C_{i,N}^{n+1} - C_{i,N}^n &= - \left[ \frac{u}{\Delta z} + \lambda_i \right] C_{i,N}^{n+1} \Delta t + \frac{u}{\Delta z} C_{i,N-1}^{n+1} \Delta t \\ C_{i,N}^{n+1} &= \left[ 1 + u \frac{\Delta t}{\Delta z} + \lambda_i \Delta t \right]^{-1} \left[ C_{i,N}^n + u \frac{\Delta t}{\Delta z} C_{i,N-1}^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

na qual  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  é o passo temporal e o índice superior indica a função avaliada no instante  $t_n$ :  $C_{i,j}^n \equiv C_{i,j}(t_n)$ .

Para resolver a equação (3.8), será usado o método de Crank-Nicholson [11], que é equivalente a integrar numericamente a equação pelo método dos trapézios e é mais preciso que o método de Euler implícito:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\psi(t)}{dt} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{M}\psi(t) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{Q}(t - \tau) dt \quad (3.12)$$

$$\psi_{n+1} - \psi_n = \mathbf{M} \frac{\psi_{n+1} + \psi_n}{2} \Delta t + \frac{\mathbf{Q}_{n+1-p} + \mathbf{Q}_{n-p}}{2} \Delta t$$

sendo  $p \equiv \tau/\Delta t$ . Se  $p$  não for um número inteiro, o vetor  $\mathbf{Q}_{n-p}$  é interpolado linearmente da seguinte maneira:

$$\mathbf{Q}_{n-p} = (n - p - m) \mathbf{Q}_{m+1} - (n - p - m - 1) \mathbf{Q}_m \quad (3.13)$$

na qual  $m$  é o menor número inteiro mais próximo de  $n - p$  ( $m \equiv \lfloor n - p \rfloor$ ). Se  $p > n$ ,  $\mathbf{Q}_{n-p} = \mathbf{Q}_0$ . Vale ressaltar que essa interpolação requer que o passo temporal  $\Delta t$  seja menor que o tempo de circulação  $\tau$ .

Explicitando  $\psi_{n+1}$  na equação (3.12):

$$\psi_{n+1} = [2\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta t]^{-1} \left\{ [2\mathbf{I} + \mathbf{M}\Delta t] \psi_n + \Delta t [\mathbf{Q}_{n+1-p} + \mathbf{Q}_{n-p}] \right\} \quad (3.14)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade de mesma dimensão que  $\mathbf{M}$ .

A cada passo temporal é calculado  $\psi_{n+1}$  pela equação (3.14). Em seguida, é calculado  $C_{i,N}^{m+1}$  pela equação (3.11), que será usado, nos passos seguintes, em  $\mathbf{Q}_{n-p}$ , e  $C_{i,0}^{m+1}$  é calculado pela condição de contorno  $C_{i,0}^{m+1} = \xi_i C_{i,N}^{m+1-p}$ .

## 3.2 Validação do Método Numérico

O método numérico usado para resolver as equações da cinética espacial será validado pelo método do falso transiente. Neste caso, esse método consiste em considerar uma configuração na qual o reator esteja crítico e usar uma condição inicial qualquer. Se o método numérico estiver correto, após um determinado tempo, a forma espacial do fluxo se igualará ao caso estacionário e, conseqüentemente, a potência permanecerá constante. Para esse teste, será considerado apenas 1 grupo de energia e 1 grupo de precursores, com os parâmetros dados no Apêndice B.

Serão três condições iniciais usadas:  $\psi_0$  com componentes todas iguais a 1; com componentes aleatórias seguindo uma distribuição uniforme com intervalo de 0 a 1; e com componentes aleatórias seguindo uma distribuição normal padrão. Como cada uma dessas condições iniciais possuirá uma normalização diferente, a potência assintótica será, em geral, diferente para cada caso.

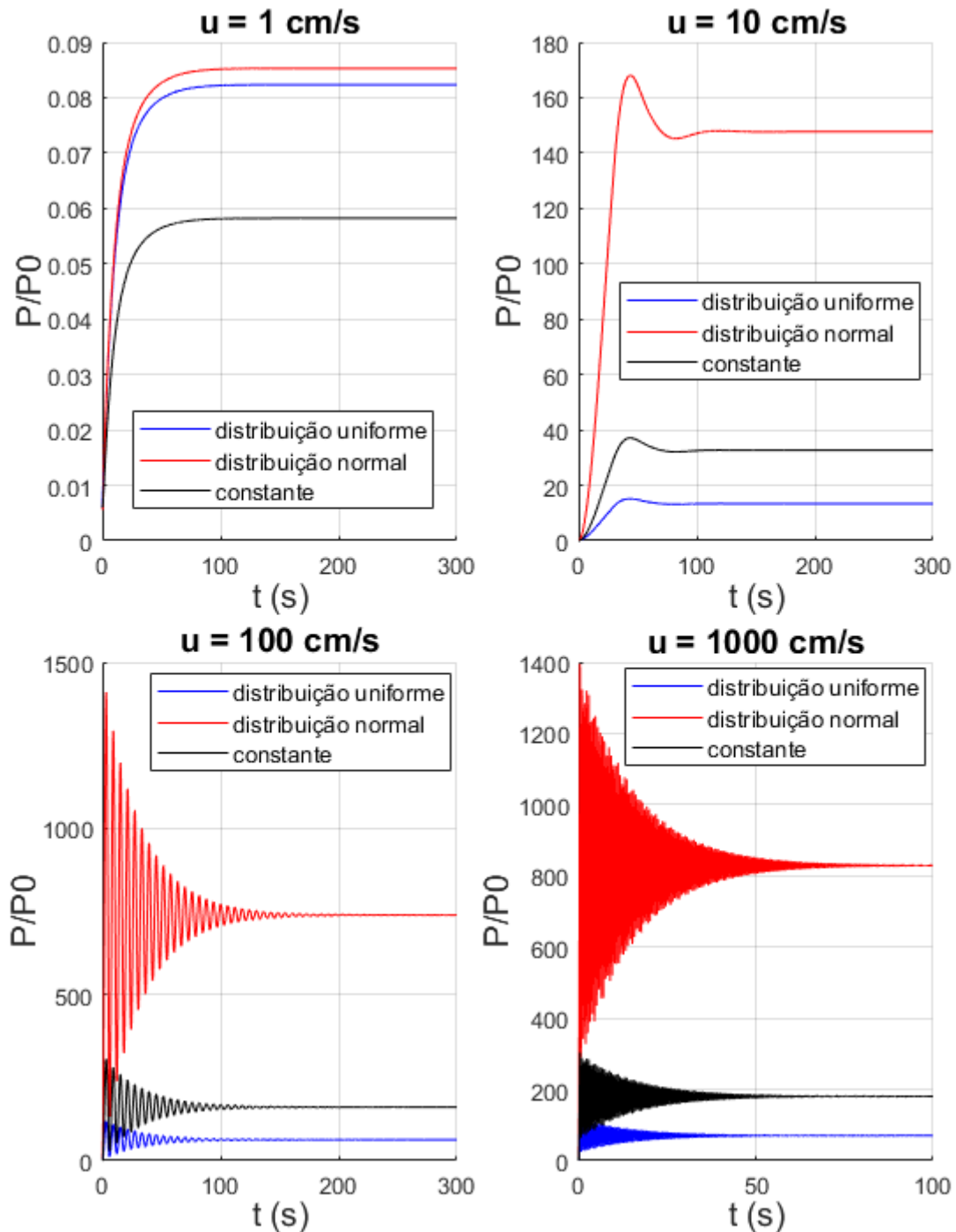


Figura 3.1: Falso transiente para velocidades de 1, 10, 100 e 1000  $cm/s$

Em todos os casos da figura 3.1, a potência se estabiliza entre 100 e 200 segundos. As oscilações em  $u = 10 \text{ cm/s}$  e  $u = 1000 \text{ cm/s}$  ocorrem pois, devido à alta velocidade de escoamento, o sistema ajusta bruscamente a forma espacial do fluxo, influenciando no valor da potência. Como a potência se estabiliza, pode-se concluir que o método numérico utilizado resulta em uma solução correta para a cinética espacial.



# Capítulo 4

## Equações da Cinética Pontual

### 4.1 Definição das Variáveis Adjuntas

Para se obter as equações da cinética pontual, primeiramente deve-se definir as variáveis adjuntas. Essas variáveis são interpretadas como funções importância [9], e são usadas como pesos para a definição dos parâmetros cinéticos, a fim de se reduzir o erro associado a essa aproximação [5]. No caso sem fonte externa de nêutrons, o fluxo e os precursores adjuntos são definidos pela solução da equação matricial com os adjuntos dos operadores do sistema estacionário. Escrevendo a equação (2.5a) e (2.5b) na forma matricial:

$$\mathbf{M}\psi^0(z) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

sendo:

$$\mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1,1} + \mathbf{M}_{1,1,2} + \mathbf{M}_{1,1,3} & \mathbf{M}_{1,2} \\ & \mathbf{M}_{2,2} \end{bmatrix} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{M}_{1,1,1} \equiv \begin{bmatrix} D_{1,0} \frac{d^2}{dz^2} - \Sigma_{R,1,0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{G,0} \frac{d^2}{dz^2} - \Sigma_{R,G,0} \end{bmatrix} \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{M}_{1,1,2} \equiv \frac{1}{k}(1 - \beta) \begin{bmatrix} \chi_1(\nu\Sigma_{f,0})_1 & \cdots & \chi_1(\nu\Sigma_{f,0})_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_G(\nu\Sigma_{f,0})_1 & \cdots & \chi_G(\nu\Sigma_{f,0})_G \end{bmatrix} \quad (4.2c)$$

$$\mathbf{M}_{1,1,3} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{s,2 \rightarrow 1,0} & \cdots & \Sigma_{s,G \rightarrow 1,0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{s,1 \rightarrow G,0} & \cdots & \Sigma_{s,G-1 \rightarrow G,0} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2d)$$

$$\mathbf{M}_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} \chi_{1,1}\lambda_1 & \cdots & \chi_{I,1}\lambda_I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{1,G}\lambda_1 & \cdots & \chi_{I,G}\lambda_I \end{bmatrix} \quad (4.2e)$$

$$\mathbf{M}_{2,1} \equiv \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \beta_1(\nu\Sigma_{f,0})_1 & \cdots & \beta_1(\nu\Sigma_{f,0})_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_I(\nu\Sigma_{f,0})_1 & \cdots & \beta_I(\nu\Sigma_{f,0})_G \end{bmatrix} \quad (4.2f)$$

$$\mathbf{M}_{2,2} \equiv \begin{bmatrix} -u_0 \frac{d}{dz} - \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -u_0 \frac{d}{dz} - \lambda_I \end{bmatrix} \quad (4.2g)$$

$$\boldsymbol{\psi}^0(z) \equiv \left[ \phi_1^0(z), \cdots, \phi_G^0(z), C_1^0(z), \cdots, C_I^0(z) \right]^T \quad (4.2h)$$

A equação para as variáveis adjuntas,  $\boldsymbol{\psi}^*(z)$ , será dada pela matriz adjunta de  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M}^\dagger \boldsymbol{\psi}^*(z) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

sendo:

$$\mathbf{M}^\dagger \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1,1}^\dagger + \mathbf{M}_{1,1,2}^\dagger + \mathbf{M}_{1,1,3}^\dagger & \mathbf{M}_{2,1}^\dagger \\ \mathbf{M}_{1,2}^\dagger & \mathbf{M}_{2,2}^\dagger \end{bmatrix} \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{M}_{1,1,1}^\dagger = \mathbf{M}_{1,1,1} \quad (4.4b)$$

$$\mathbf{M}_{1,1,2}^\dagger \equiv \frac{1}{k}(1-\beta) \begin{bmatrix} \chi_1(\nu\Sigma_{f,0})_1 & \cdots & \chi_G(\nu\Sigma_{f,0})_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_1(\nu\Sigma_{f,0})_G & \cdots & \chi_G(\nu\Sigma_{f,0})_G \end{bmatrix} \quad (4.4c)$$

$$\mathbf{M}_{1,1,3}^\dagger \equiv \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{s,1 \rightarrow 2,0} & \cdots & \Sigma_{s,1 \rightarrow G,0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{s,G \rightarrow 1,0} & \cdots & \Sigma_{s,G \rightarrow G-1,0} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4d)$$

$$\mathbf{M}_{1,2}^\dagger \equiv \begin{bmatrix} \chi_{1,1}\lambda_1 & \cdots & \chi_{1,G}\lambda_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{I,1}\lambda_I & \cdots & \chi_{I,G}\lambda_I \end{bmatrix} \quad (4.4e)$$

$$\mathbf{M}_{2,1}^\dagger \equiv \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \beta_1(\nu\Sigma_{f,0})_1 & \cdots & \beta_I(\nu\Sigma_{f,0})_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1(\nu\Sigma_{f,0})_G & \cdots & \beta_I(\nu\Sigma_{f,0})_G \end{bmatrix} \quad (4.4f)$$

$$\mathbf{M}_{2,2}^\dagger \equiv \begin{bmatrix} u_0 \frac{d}{dz} - \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_0 \frac{d}{dz} - \lambda_I \end{bmatrix} \quad (4.4g)$$

$$\boldsymbol{\psi}^*(z) \equiv \left[ \phi_1^*(z), \dots, \phi_G^*(z), C_1^*(z), \dots, C_I^*(z) \right]^T \quad (4.4h)$$

Escrevendo as equações por extenso, tem-se:

$$\begin{aligned} -D_{g,0} \frac{d^2 \phi_g^*}{dz^2} + \Sigma_{R,g,0} \phi_g^* - \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g \rightarrow g',0} \phi_{g'}^* &= \frac{1}{k} (\nu \Sigma_{f,0})_g \sum_{g'=1}^G (1 - \beta) \chi_{g'} \phi_{g'}^* \\ &+ \frac{1}{k} (\nu \Sigma_{f,0})_g \sum_{i=1}^I \beta_i C_i^* \end{aligned} \quad (4.5a)$$

$$u_0 \frac{dC_i^*}{dz} - \lambda_i C_i^* + \lambda_i \sum_{g'=1}^G \chi_{i,g'} \phi_{g'}^* = 0 \quad (4.5b)$$

na qual, como sempre, as equações valem para  $g = 1, \dots, G$  e  $i = 1, \dots, I$ . As condições de contorno são simétricas às do caso estacionário [4]:

$$\phi_g^*(0) = 0 = \phi_g^*(H) \quad (4.6a)$$

$$C_i^*(H) = C_i^*(0) \xi_{i,0} \quad (4.6b)$$

Essa equação é resolvida numericamente pelo mesmo método usado no sistema estacionário.

## 4.2 Dedução das Equações da Cinética Pontual

As equações da cinética pontual para o sistema de combustível líquido foram deduzidas por LAPENTA *et al.* [4], de forma análoga à feita por HENRY [5] para o sistema de combustível sólido. Para serem deduzidas, são necessárias as equações da cinética espacial (2.3a) e (2.3b), assim como das equações adjuntas definidas na seção anterior, (4.5a) e (4.5b).

Inicialmente, considera-se que a parte espacial e a temporal do fluxo e dos precursores podem ser separadas:

$$\phi_g(z, t) = \phi_g^0(z) P(t) \quad (4.7a)$$

$$C_i(z, t) = C_i^0(z) G_i(t) \quad (4.7b)$$

As funções  $P(t)$  e  $G_i(t)$  são normalizadas para 1 em  $t = 0$ , para que a forma espacial do fluxo e dos precursores no início do transiente seja a mesma do sistema estacionário.

Começando pelas equações dos fluxos escalar e adjunto, multiplica-se cada equação (2.3a) por  $\phi_g^*(z)$ , integra-se em  $z$  de 0 a  $H$  e soma-se todas as equações resultantes de  $g = 1$  a  $g = G$ , já considerando a separação de variáveis definida anteriormente:

$$\begin{aligned} & \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^* \frac{1}{\nu_g} \phi_g^0 dz \frac{dP(t)}{dt} = \left[ \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^* D_g \frac{d^2 \phi_g^0}{dz^2} dz - \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^* \Sigma_{R,g} \phi_g^0 dz \right. \\ & + \left. \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G \int_0^H \phi_g^* \left\{ \Sigma_{s,g' \rightarrow g} (1 - \delta_{gg'}) + (1 - \beta) \chi_g (\nu \Sigma_f)_{g'} \right\} \phi_{g'}^0 dz \right] P(t) \quad (4.8) \\ & + \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \int_0^H \phi_g^* \chi_{i,g} \lambda_i C_i^0 dz G_i(t) \end{aligned}$$

sendo  $\delta_{gg'}$  a delta de Kronecker. Fazendo agora o mesmo com a equação (4.5a), porém multiplicando por  $\phi_g^0(z)P(t)$  e sendo  $k = 1$  (sistema crítico antes do transiente):

$$\begin{aligned} 0 = & \left[ \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^0 D_{g,0} \frac{d^2 \phi_g^*}{dz^2} dz - \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^0 \Sigma_{R,g,0} \phi_g^* dz \right. \\ & + \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G \int_0^H \phi_g^0 \left\{ \Sigma_{s,g \rightarrow g',0} (1 - \delta_{gg'}) + (1 - \beta) \chi_{g'} (\nu \Sigma_{f,0})_g \right\} \phi_{g'}^* dz \quad (4.9) \\ & \left. + \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \int_0^H \phi_g^0 (\nu \Sigma_{f,0})_g \beta_i C_i^* dz \right] P(t) \end{aligned}$$

Fazendo integração por partes no primeiro termo da equação (4.9) e levando em consideração as condições de contorno (fluxo nulo nas fronteiras), pode-se escrevê-lo como:

$$\sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^0 D_{g,0} \frac{d^2 \phi_g^*}{dz^2} dz = - \sum_{g=1}^G \int_0^H \frac{d\phi_g^0}{dz} D_{g,0} \frac{d\phi_g^*}{dz} dz \quad (4.10)$$

e o mesmo vale para o primeiro termo do lado direito da equação (4.8):

$$\sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^* D_g \frac{d^2 \phi_g^0}{dz^2} dz = - \sum_{g=1}^G \int_0^H \frac{d\phi_g^*}{dz} D_g \frac{d\phi_g^0}{dz} dz \quad (4.11)$$

No terceiro termo da equação (4.9), as variáveis  $g$  e  $g'$  são mudas, podendo, assim, serem permutadas:

$$\begin{aligned} & \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G \int_0^H \phi_g^0 \left\{ \Sigma_{s,g \rightarrow g',0} (1 - \delta_{gg'}) + (1 - \beta) \chi_{g'} (\nu \Sigma_{f,0})_g \right\} \phi_{g'}^* dz = \\ & \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G \int_0^H \phi_{g'}^0 \left\{ \Sigma_{s,g' \rightarrow g,0} (1 - \delta_{gg'}) + (1 - \beta) \chi_g (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \right\} \phi_g^* dz \quad (4.12) \end{aligned}$$

Define-se  $\Delta x$  como a diferença entre o valor de um parâmetro  $x(t)$  e seu valor inicial  $x_0$ :  $\Delta x \equiv x(t) - x_0$ . Assim, subtraindo a equação (4.9) da equação (4.8), obtém-se equação da cinética pontual para o fator de amplitude (ou potência nuclear)  $P(t)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^* \frac{1}{v_g} \phi_g^0 dz \frac{dP(t)}{dt} = & \left[ - \sum_{g=1}^G \int_0^H \frac{d\phi_g^*}{dz} \Delta D_g \frac{d\phi_g^0}{dz} dz - \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^* \Delta \Sigma_{R,g} \phi_g^0 dz \right. \\ & + \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G \int_0^H \phi_g^* \left\{ \Delta \Sigma_{s,g' \rightarrow g} (1 - \delta_{gg'}) + (1 - \beta) \chi_g (\nu \Delta \Sigma_f)_{g'} \right\} \phi_{g'}^0 dz \\ & \left. - \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \int_0^H C_i^* \beta_i (\nu \Sigma_{f,0})_g \phi_g^0 dz \right] P(t) + \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \int_0^H \phi_g^* \chi_{i,g} \lambda_i C_i^0 dz G_i(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Agora, multiplicando cada equação de (4.5b) por  $C_i^*(z)$  e integrando em  $z$  de 0 a  $H$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^H C_i^* C_i^0 dz \frac{dG_i(t)}{dt} = & \left[ - \int_0^H C_i^* u \frac{dC_i^0}{dz} dz - \int_0^H C_i^* \lambda_i C_i^0 dz \right] G_i(t) \\ & + \sum_{g=1}^G \int_0^H C_i^* \beta_i (\nu \Sigma_f)_g \phi_g^0 dz P(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Fazendo-se o mesmo na equação (4.7b), mas multiplicando por  $C_i^0(z)G_i(t)$  e tomando  $k = 1$ :

$$0 = \left[ \int_0^H C_i^0 u_0 \frac{dC_i^*}{dz} dz - \int_0^H C_i^0 \lambda_i C_i^* dz + \sum_{g=1}^G \int_0^H C_i^0 \lambda_i \chi_{i,g} \phi_g^* dz \right] G_i(t) \quad (4.15)$$

Realizando integração por partes no primeiro termo da equação (4.15):

$$\begin{aligned} \int_0^H C_i(z, t) u_0 \frac{dC_i^*}{dz} dz = & C_i^*(H) u_0 C_i(H, t) - C_i^*(0) u_0 C_i(0, t) \\ & - \int_0^H C_i^* u_0 \frac{\partial C_i(z, t)}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando a condição de contorno  $C_i(0, t) = C_i(H, t - \tau)\xi_i$  e a separação de variáveis dos precursores:

$$\begin{aligned} \int_0^H C_i^0 u_0 \frac{dC_i^*}{dz} dz G_i(t) = & C_i^*(H) u_0 C_i^0(H) G_i(t) - C_i^*(0) u_0 \xi_i C_i^0(H) G_i(t - \tau) \\ & - \int_0^H C_i^* u_0 \frac{dC_i^0}{dz} dz G_i(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Subtraindo a equação (4.15) da equação (4.14) e usando a expressão de (4.17):

$$\begin{aligned} \int_0^H C^* C_i^0 dz \frac{dG_i(t)}{dt} &= \sum_{g=1}^G \int_0^H C_i^* \beta_i (\nu \Sigma_f)_g \phi_g^0 dz P(t) + C_i^*(0) u_0 \xi_i C_i^0(H) G_i(t - \tau) \\ &- \left[ \lambda_i \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^* \chi_{i,g} C_i^0 dz + \int_0^H C_i^* \Delta u \frac{dC_i^0}{dz} dz + C_i^*(H) u_0 C_i^0(H) \right] G_i(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

As equações (4.13) e (4.18) podem ser escritas na forma usual da cinética pontual:

$$\Lambda_P \frac{dP(t)}{dt} = \left( \rho(t) - \hat{\beta} \right) P(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \Gamma_i(t) \quad (4.19a)$$

$$\Lambda_i \frac{d\Gamma_i(t)}{dt} = \left( \rho_i(t) + \hat{\beta}_i \right) P(t) - \left( \lambda_i + \mu_{u,i}(t) + \mu_{\xi,i} \right) \Gamma_i(t) + \sigma_i \Gamma_i(t - \tau) \quad (4.19b)$$

na qual os parâmetros cinéticos são definidos por:

$$\Gamma_i(t) \equiv \frac{G_i(t)}{\mathcal{F}} \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \chi_{i,g} C_i^0(z) dz \quad (4.20a)$$

$$\begin{aligned} \rho(t) \equiv \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G \int_0^H \left\{ \phi_g^*(z) \left[ -\Delta \Sigma_{R,g} \delta_{gg'} + (1 - \beta) \chi_g (\nu \Delta \Sigma_f)_{g'} \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta \Sigma_{s,g' \rightarrow g} (1 - \delta_{gg'}) \right] \phi_{g'}^0(z) - \frac{d\phi_g^*(z)}{dz} \Delta D_g \delta_{gg'} \frac{d\phi_{g'}^0(z)}{dz} \right\} dz \end{aligned} \quad (4.20b)$$

$$\hat{\beta}_i \equiv \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{g=1}^G \int_0^H C_i^*(z) \beta_i (\nu \Sigma_{f,0})_g \phi_g^0(z) dz, \quad \hat{\beta} \equiv \sum_{i=1}^I \hat{\beta}_i \quad (4.20c)$$

$$\Lambda_P \equiv \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \frac{1}{v_g} \phi_g^0(z) dz \quad (4.20d)$$

$$\Lambda_i \equiv \frac{\int_0^H C_i^*(z) C_i^0(z) dz}{\sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \chi_{i,g} C_i^0(z) dz} \quad (4.20e)$$

$$\rho_i(t) \equiv \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{g=1}^G \int_0^H C_i^*(z) \beta_i (\nu \Delta \Sigma_f)_g \phi_g^0(z) dz \quad (4.20f)$$

$$\mu_{u,i}(t) \equiv \frac{\int_0^H C_i^*(z) \Delta u \frac{dC_i^0(z)}{dz} dz}{\sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \chi_{i,g} C_i^0(z) dz} \quad (4.20g)$$

$$\mu_{\xi,i} \equiv \frac{u_0 C_i^*(H) C_i^0(H)}{\sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \chi_{i,g} C_i^0(z) dz} \quad (4.20h)$$

$$\sigma_i \equiv \frac{u_0 C_i^*(0) C_i^0(H) \xi_i}{\sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \chi_{i,g} C_i^0(z) dz} \quad (4.20i)$$

com o fator de normalização  $\mathcal{F}$  dado por:

$$\mathcal{F} \equiv \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \left\{ \sum_{i=1}^I \chi_{i,g} \lambda_i C_i^0(z) + (1 - \beta) \chi_g \sum_{g'=1}^G (\nu \Sigma_{f,0})_{g'} \phi_{g'}^0(z) \right\} dz \quad (4.21)$$

sendo  $i = 1, \dots, I$ .

Os parâmetros cinéticos novos, que não aparecem na cinética pontual no caso de combustível sólido, são [4]:

- $\Gamma_i(t)$ : variável relacionada com o fator de amplitude  $G_i(t)$  dos precursores
- $\Lambda_i$ : parâmetro associado com o tempo médio de vida dos precursores devido ao escoamento do combustível
- $\rho_i(t)$ : perturbação da seção de choque de fissão na equação do precursor, que está associado a uma perturbação na produção de precursores
- $\mu_{u,i}(t)$ : alteração aparente na constante de decaimento, associada a uma perturbação na velocidade de escoamento
- $\mu_{\xi,i}$ : segunda alteração na constante de decaimento, associada a uma perturbação no tempo de circulação na tubulação
- $\sigma_i$ : termo relacionado à reentrada dos precursores que não decaíram durante a circulação na tubulação

### 4.3 Aproximação de *Prompt-Jump* e Solução Analítica

As equações (4.19a) e (4.19b) formam um sistema com  $I + 1$  equações diferenciais atrasadas, devido ao termo  $\Gamma_i(t - \tau)$ . Apesar de esse tipo de equação possuir solução analítica quando os parâmetros são independentes do tempo [8], a solução para um sistema de equações é muito complexa. No entanto, com a aproximação de *prompt-jump*, é possível reduzir o sistema para uma equação apenas, se for considerado apenas 1 grupo de precursores.

A aproximação de *prompt-jump* [9] consiste em desprezar o termo  $\Lambda_P \frac{dP(t)}{dt}$  na equação (4.19a). Isso é possível quando o parâmetro de tempo médio de geração,

$\Lambda_P$ , é pequeno, em geral da ordem de  $10^{-4}$  s. Assim, as equações reduzem-se para ( $I = 1$ ):

$$0 = \left(\rho(t) - \hat{\beta}\right)P(t) + \lambda_1\Gamma_1(t) \quad (4.22a)$$

$$\Lambda_1 \frac{d\Gamma_1(t)}{dt} = \left(\rho_1(t) + \hat{\beta}\right)P(t) - \left(\lambda_1 + \mu_{u,1}(t) + \mu_{\xi,1}\right)\Gamma_1(t) + \sigma_1\Gamma_1(t - \tau) \quad (4.22b)$$

A equação (4.22a) dá a seguinte relação entre  $P(t)$  e  $\Gamma_1(t)$ :

$$P(t) = -\frac{\lambda_1}{\rho(t) - \hat{\beta}}\Gamma_1(t) \quad (4.23)$$

que, substituída na equação (4.22b), resulta em:

$$\Lambda_1 \frac{d\Gamma_1(t)}{dt} = -\left[\frac{\rho + \rho_1}{\rho - \hat{\beta}}\lambda_1 + \mu_{u,1} + \mu_{\xi,1}\right]\Gamma_1(t) + \sigma_1\Gamma_1(t - \tau) \quad (4.24)$$

já considerando que os parâmetros cinéticos não variam com o tempo. Escrevendo essa equação da seguinte forma:

$$\frac{d\Gamma_1(t)}{dt} + a\Gamma_1(t) + a_d\Gamma_1(t - \tau) = 0 \quad (4.25)$$

na qual:

$$a \equiv \frac{1}{\Lambda_1} \left[ \frac{\rho + \rho_1}{\rho - \hat{\beta}} \lambda_1 + \mu_{u,1} + \mu_{\xi,1} \right] \quad (4.26a)$$

$$a_d \equiv -\frac{\sigma_1}{\Lambda_1} \quad (4.26b)$$

A condição inicial é:

$$\Gamma_1(0) = \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \chi_{1,g} C_1^0(z) dz \quad (4.27)$$

que também é válida para  $t < 0$ . A solução é dada por [8]:

$$\Gamma_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^0 e^{S_n t} \quad (4.28)$$

sendo:

$$S_n \equiv \frac{1}{\tau} W_n(-a_d \tau e^{a\tau}) - a \quad (4.29a)$$

$$A_n^0 \equiv \frac{1 - \left(1 - e^{-S_n \tau}\right) a_d e^{-S_n \tau}}{\left(1 - a_d \tau e^{-S_n \tau}\right) S_n} \Gamma_1(0) \quad (4.29b)$$

na qual  $W_n(z)$  é o n-ésimo ramo da função  $W$  de Lambert.



## 4.4 Solução Numérica

A solução numérica das equações da cinética pontual é feita pelo mesmo método usado para a solução da cinética espacial. Escrevendo as equações (4.19a) e (4.19b) na forma matricial:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt} = \mathbf{M}\boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{H}\boldsymbol{\psi}(t - \tau) \quad (4.30)$$

na qual:

$$\mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\rho - \hat{\beta}}{\Lambda_P} & \frac{\lambda_1}{\Lambda_P} & \cdots & \frac{\lambda_I}{\Lambda_P} \\ \frac{\rho_1 + \hat{\beta}_1}{\Lambda_1} & -\frac{1}{\Lambda_1}(\lambda_1 + \mu_{u,1} + \mu_{\xi,1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\rho_I + \hat{\beta}_I}{\Lambda_I} & 0 & \cdots & -\frac{1}{\Lambda_I}(\lambda_I + \mu_{u,I} + \mu_{\xi,I}) \end{bmatrix} \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1}{\Lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_I}{\Lambda_I} \end{bmatrix} \quad (4.31b)$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) \equiv \begin{bmatrix} P(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \vdots \\ \Gamma_I(t) \end{bmatrix} \quad (4.31c)$$

sendo já considerado que as matrizes de coeficientes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$  não dependem do tempo.

Integra-se numericamente a equação (4.30) pelo método de Crank-Nicholson:

$$\boldsymbol{\psi}_{n+1} = \left[2\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta t\right]^{-1} \left\{ \left[2\mathbf{I} + \mathbf{M}\Delta t\right]\boldsymbol{\psi}_n + \mathbf{H}\Delta t \left[\boldsymbol{\psi}_{n+1-p} + \boldsymbol{\psi}_{n-p}\right] \right\} \quad (4.32)$$

sendo  $p \equiv \tau/\Delta t$  e  $\boldsymbol{\psi}_{n-p}$  interpolado da forma que foi descrita no capítulo anterior.

Como  $P(0)$  foi normalizado para 1, assim como  $G_i(0)$ , a condição inicial fica:

$$\boldsymbol{\psi}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1(0) \\ \vdots \\ \Gamma_I(0) \end{bmatrix} \quad (4.33a)$$

$$\Gamma_i(0) = \frac{1}{\mathcal{F}} \sum_{g=1}^G \int_0^H \phi_g^*(z) \chi_{i,g} C_i^0(z) dz \quad i = 1, \dots, I \quad (4.33b)$$

A solução numérica da aproximação de *prompt-jump* (4.25) é um caso particular do algoritmo anterior:

$$\Gamma_1^{n+1} = \frac{2 - a\Delta t}{2 + a\Delta t} \Gamma_1^n - \frac{a_d\Delta t}{2 + a\Delta t} \left[ \Gamma_1^{n+1-p} + \Gamma_1^{n-p} \right] \quad (4.34)$$

Lembrando as definições de  $a$  e  $a_d$ :

$$a \equiv \frac{1}{\Lambda_1} \left[ \frac{\rho + \rho_1}{\rho - \hat{\beta}} \lambda_1 + \mu_{u,1} + \mu_{\xi,1} \right] \quad (4.35a)$$

$$a_d \equiv -\frac{\sigma_1}{\Lambda_1} \quad (4.35b)$$

Com isso, a potência é dada por:

$$P^n = -\frac{\lambda_1}{\rho - \hat{\beta}} \Gamma_1^n \quad (4.36)$$

## 4.5 Validação do Método Numérico

Para validar o método numérico usado para resolver as equações da cinética pontual, a solução numérica é comparada com a solução analítica para a aproximação de *prompt-jump* pelo erro relativo máximo, que é dado por:

$$erro = \max \left| \frac{P_{analítico} - P_{numérico}}{P_{analítico}} \right| \times 100\% \quad (4.37)$$

O erro máximo será calculado para diferentes velocidades de escoamento. O transiente considerado consiste de um conjunto de parâmetros nucleares na qual o reator não é crítico, com uma condição inicial dada pelo sistema estacionário feito crítico dividindo-se a seção de choque macroscópica de fissão pelo fator de multiplicação efetivo ( $\Sigma_{f,g,0} = \Sigma_{f,g}/k_{eff}$ ). Ou seja, o transiente ocorre pela perturbação  $\Delta\Sigma_{f,g} = \Sigma_{f,g} - \Sigma_{f,g}/k_{eff}$ .

Tabela 4.1: Erro relativo máximo, em %, entre soluções analítica e numérica da cinética pontual

$u$ (cm/s)	0.1	1	10	100	1000
Erro (%)	$6.0 \times 10^{-1}$	$4.8 \times 10^{-1}$	$4.7 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-2}$	$3.1 \times 10^{-1}$

Os erros na tabela 4.1 são todos menores que 1% e ocorrem apenas nos primeiros passos temporais, sendo menores ao longo do tempo. Assim, pode-se concluir que a solução numérica proposta é precisa. Os valores dos parâmetros utilizados encontram-se no Apêndice B.

# Capítulo 5

## Resultados

Para analisar a validade do modelo proposto de cinética pontual, a solução será comparada com a da cinética espacial para alguns transientes selecionados. Serão considerados dois transientes: uma perturbação na seção de choque macroscópica de fissão  $\Sigma_{f,g}$  e uma perturbação na velocidade de escoamento  $u$ .

A perturbação na seção de choque de fissão será sempre da forma descrita na seção 4.5: usa-se um valor para  $\Sigma_{f,g}$  e calcula-se o fator de multiplicação efetivo  $k_{eff}$ . O valor inicial desse parâmetro é, então, definido como  $\Sigma_{f,g}/k_{eff}$  e o valor perturbado é  $\Sigma_{f,g}$ . A perturbação é dada por  $\Delta\Sigma_{f,g} = \Sigma_{f,g} - \Sigma_{f,g}/k_{eff}$ .

A variável a ser usada para as comparações será a potência nuclear, definida como:

$$P(t) = \sum_{g=1}^G \int_0^H w_{\Sigma_{f,g}} \phi_g(z, t) dz \quad (5.1)$$

Todas as perturbações serão do tipo impulso. Ou seja, o valor do parâmetro é perturbado em  $t = 0$  para um novo valor, que será constante no tempo e uniforme no espaço. Vale notar que uma perturbação na seção de choque de fissão também alteraria a seção de choque de absorção. No entanto, sabendo que a seção de choque de absorção é a soma da fissão e captura, considera-se, por simplicidade, que também ocorre uma perturbação na seção de choque de captura de forma que a absorção não varie. Os dados numéricos utilizados nos cálculos encontram-se no Apêndice B.

### 5.1 Perturbação na Seção de Choque de Fissão

Será analisado o transiente para o caso monoenergético e 1 grupo de precursores, e para o caso de 3 grupos de energia (dados de LAPENTA *et al.* [4]) e 2 grupos de precursores, ambos para as velocidades de 1, 10, 100 e 1000  $cm/s$ .

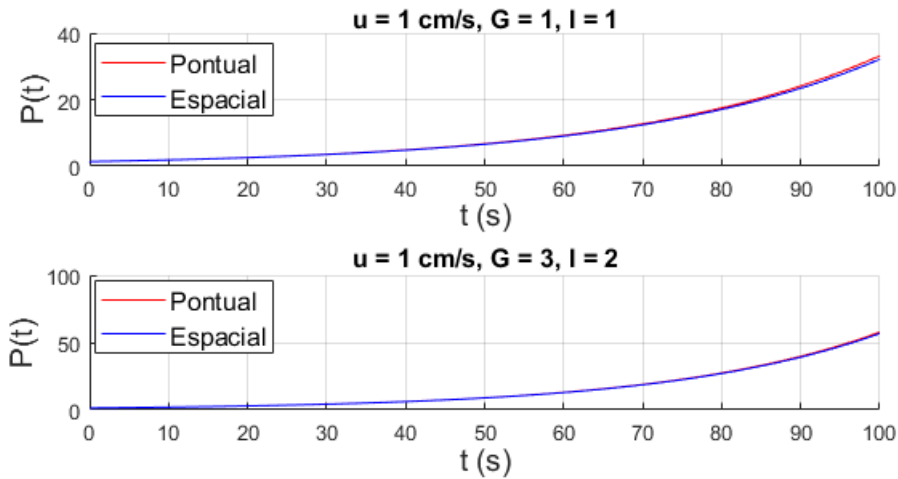


Figura 5.1: Transiente pela perturbação na seção de choque macroscópica de fissão ( $u = 1 \text{ cm/s}$ )

Para velocidade de escoamento de  $1 \text{ cm/s}$  mostrada na figura 5.1, vê-se que as soluções da cinética pontual e da espacial são muito próximas. O comportamento da potência é similar ao caso de combustível sólido: crescimento exponencial para uma reatividade positiva. A reatividade obtida foi de  $161.09 \text{ pcm}$  para o caso monoenergético e de  $163.12 \text{ pcm}$  para o caso multigrupo.

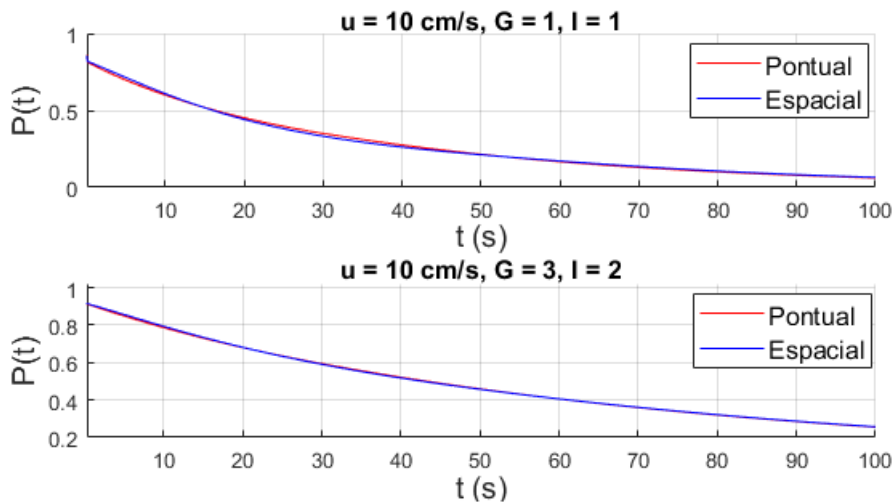


Figura 5.2: Transiente pela perturbação na seção de choque macroscópica de fissão ( $u = 10 \text{ cm/s}$ )

Para a velocidade de  $10 \text{ cm/s}$  mostrada na figura 5.2, as soluções desviam-se ligeiramente, mas a cinética pontual continua aproximando a cinética espacial de forma suficientemente precisa. A reatividade obtida foi de  $-79.25 \text{ pcm}$  para o caso monoenergético e de  $-36.97 \text{ pcm}$  para o caso multigrupo.

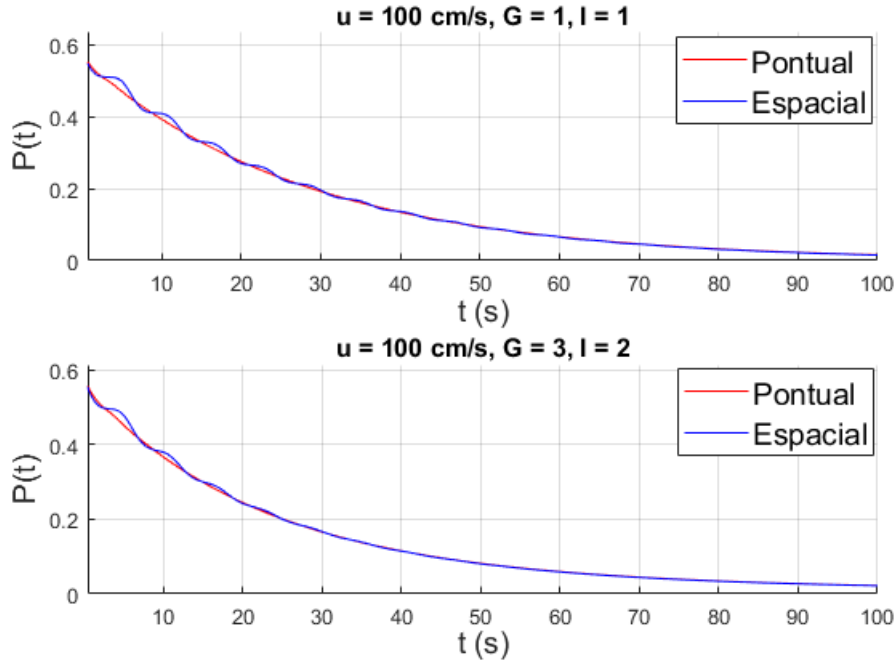


Figura 5.3: Transiente pela perturbação na seção de choque macroscópica de fissão ( $u = 100 \text{ cm/s}$ )

Para a velocidade de  $100 \text{ cm/s}$  mostrada na figura 5.3, acontece um fenômeno oscilatório comum de equações diferenciais atrasadas [8], que são as do sistema de combustível líquido. Na cinética espacial, a potência passa por alguns patamares constantes, que são causados pela reintrodução dos precursores. Esses precursores foram produzidos no instante  $t - \tau$ , no qual a potência estava mais alta que no instante  $t$ , tendo, assim, uma maior concentração. Nessa velocidade, o tempo de circulação  $\tau$  é curto o suficiente para que poucos precursores decaiam na tubulação, e longo o suficiente para que haja uma variação significativa da potência entre  $t - \tau$  e  $t$ , fazendo com que a reintrodução desses precursores aumente ligeiramente a potência, contrabalanceando sua queda e causando os intervalos de potência constante. Esse efeito diminui com o tempo, pois a diferença entre  $P(t - \tau)$  e  $P(t)$  passa a ser pouco significativa.

Esse fenômeno de patamares de potência não apareceu na curva da cinética pontual devido aos parâmetros utilizados. Se o tamanho da tubulação for aumentado de  $L = 300 \text{ cm}$  para  $L = 1000 \text{ cm}$ , os patamares da potência aparecem, também, na cinética pontual, porém de forma reduzida, como mostrado na figura 5.4. Isso pode ser atribuído às aproximações feitas pela cinética pontual, que começam a falhar para esse caso, podendo, inclusive, ocultar esse fenômeno.

A reatividade obtida, na figura 5.3, foi de  $-190.23 \text{ pcm}$  para o caso monoenergético e de  $-188.83 \text{ pcm}$  para o caso multigrupo.

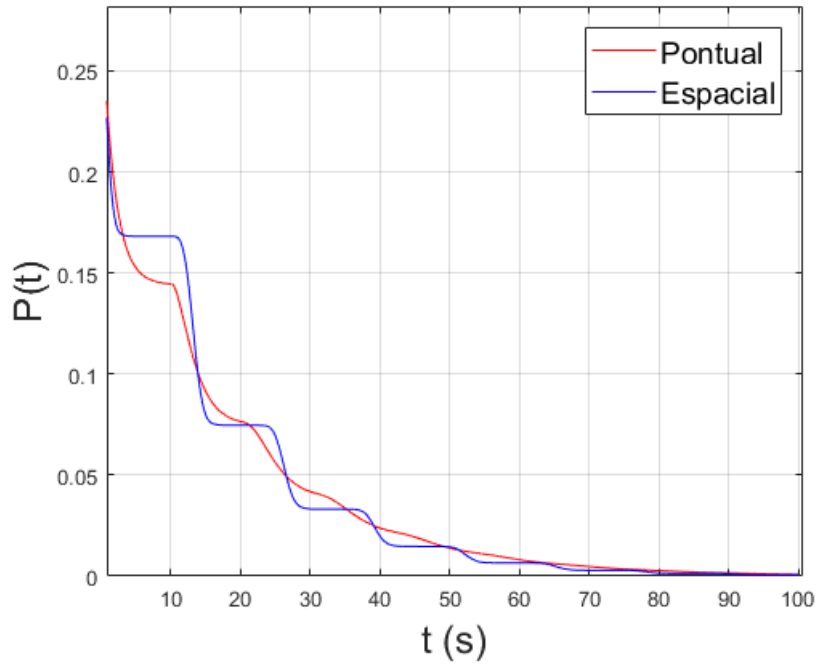


Figura 5.4: Fenômeno de patamares de potência constante na cinética pontual, para velocidade de  $100\text{ cm/s}$

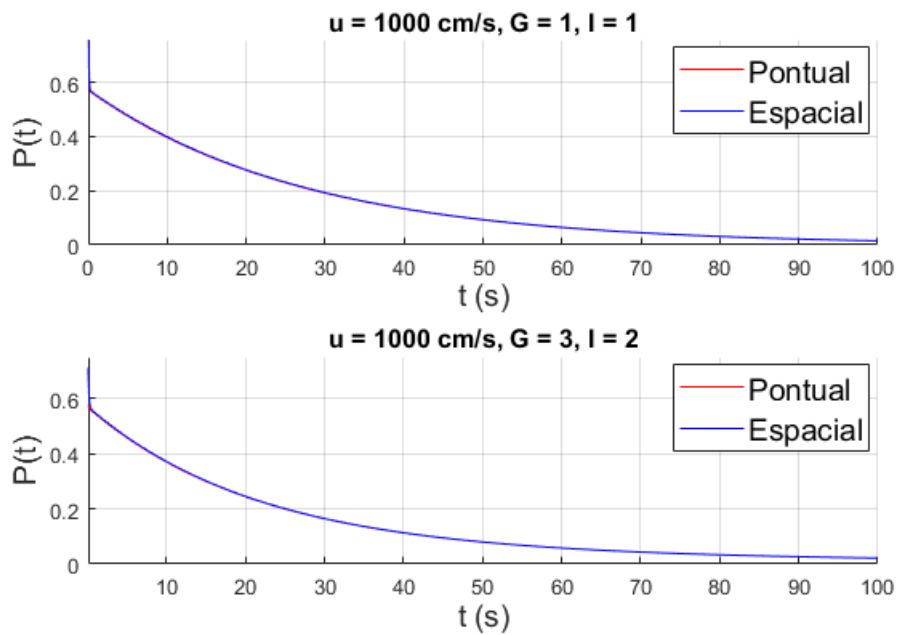


Figura 5.5: Transiente pela perturbação na seção de choque macroscópica de fissão ( $u = 1000\text{ cm/s}$ )

Para a velocidade de  $1000\text{ cm/s}$  mostrada na figura 5.5, o efeito oscilatório visto anteriormente já não ocorre mais. Para essa velocidade, o tempo de circulação passa a ser muito curto, de forma que a diferença entre  $P(t - \tau)$  e  $P(t)$  é muito

pequena. Assim, a concentração de precursores produzidos em  $t - \tau$  é muito próxima dos produzidos em  $t$ , então a reintrodução deles causa apenas uma diminuição mais lenta da potência.

A cinética pontual volta a aproximar bem os resultados da cinética espacial. A reatividade obtida foi de  $-191.97 pcm$  para o caso monoenergético e de  $-191.78 pcm$  para o caso multigrupo.

## 5.2 Perturbação na Velocidade de Escoamento

Neste transiente serão consideradas quatro perturbações:  $\Delta u = \pm 0.01 u_0$  e  $\Delta u = \pm 0.1 u_0$ , todas aplicadas aos casos monoenergético ( $G = 1, I = 1$ ) e multigrupo ( $G = 3, I = 2$ ). As velocidades iniciais analisadas são de 1, 10 e 100  $cm/s$ . Não há perturbação em nenhum parâmetro nuclear ou geométrico.

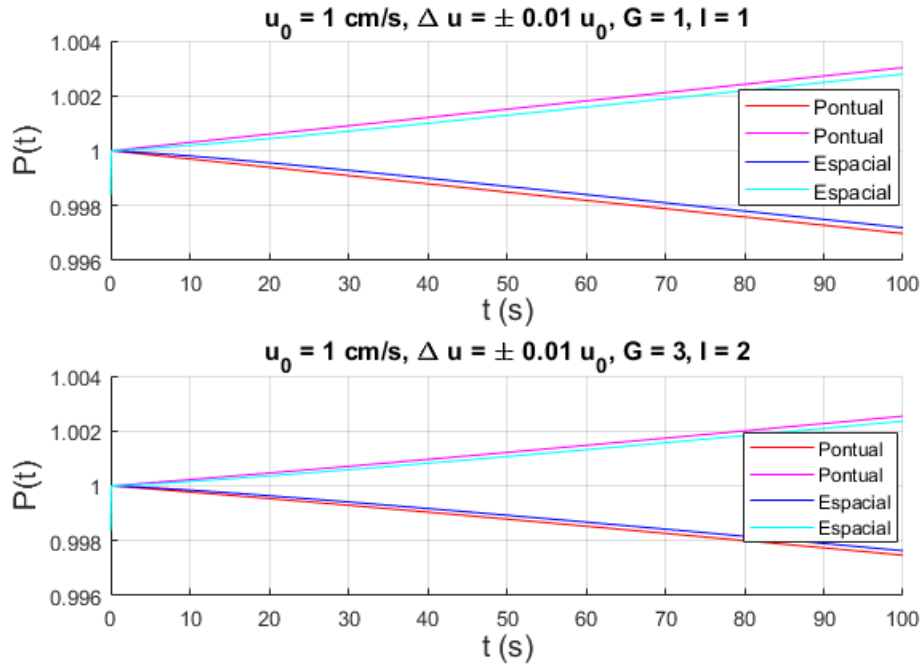


Figura 5.6: Transiente pela perturbação na velocidade:  $\Delta u = \pm 0.01 u_0$ ,  $u_0 = 1 \text{ cm/s}$ . Curvas crescentes:  $\Delta u$  negativo. Curvas decrescentes:  $\Delta u$  positivo

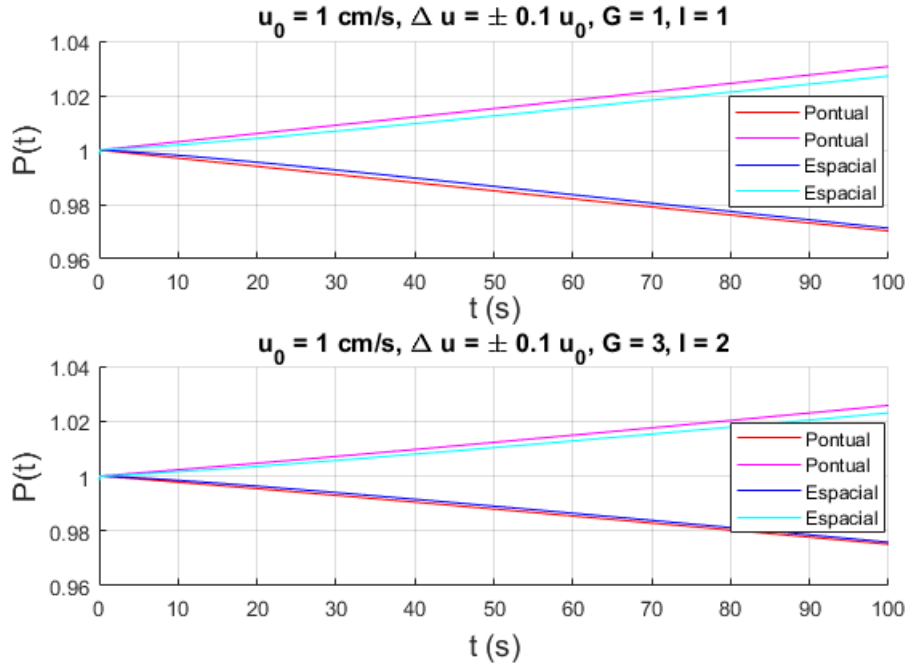


Figura 5.7: Transiente pela perturbação na velocidade:  $\Delta u = \pm 0.1 u_0$ ,  $u_0 = 1 \text{ cm/s}$ .  
 Curvas crescentes:  $\Delta u$  negativo. Curvas decrescentes:  $\Delta u$  positivo

Para a velocidade de  $1 \text{ cm/s}$  mostrada nas figuras 5.6 e 5.7, em ambas perturbações de 1% e 10% da velocidade inicial, a cinética pontual aproxima bem o resultado da cinética espacial, mas com um erro maior do que nos casos vistos para uma perturbação na seção de choque.

O comportamento do sistema para uma variação positiva ou negativa da velocidade é consistente com o resultado da figura 2.2: o aumento da velocidade faz com que o fator de multiplicação diminua, o que causa a queda da potência. Da mesma forma, a diminuição da velocidade aumenta o fator de multiplicação, causando o aumento da potência.

Vale ressaltar que, como os parâmetros nucleares não são perturbados, a reatividade pela definição de (4.20b) é nula. O equivalente da reatividade nesse transiente seria o parâmetro  $\mu_{u,i}$  (4.20g), que possui o termo da velocidade perturbada  $\Delta u$ .



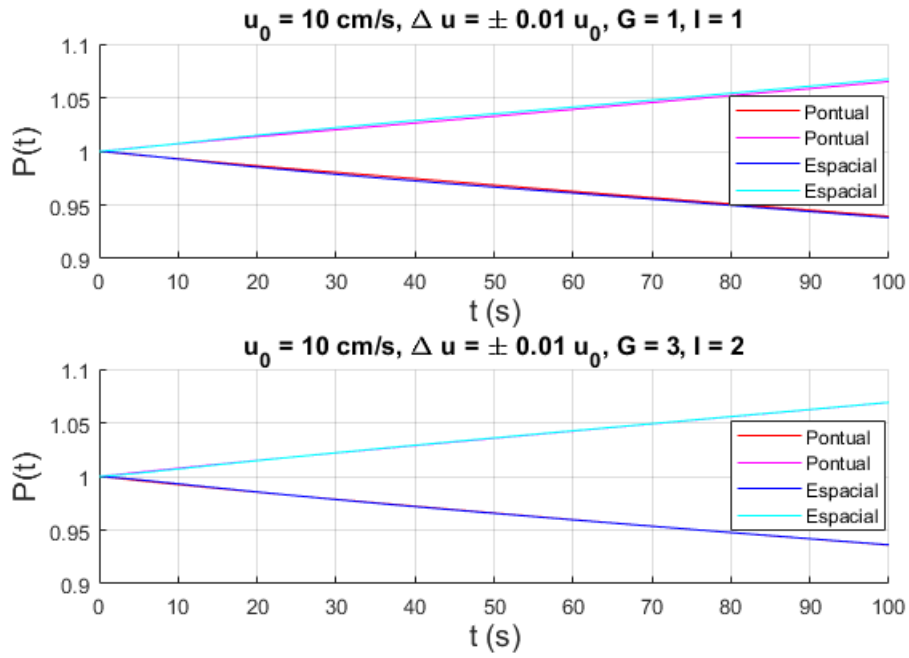


Figura 5.8: Transiente pela perturbação na velocidade:  $\Delta u = \pm 0.01 u_0$ ,  $u_0 = 10 \text{ cm/s}$ .  
 Curvas crescentes:  $\Delta u$  negativo. Curvas decrescentes:  $\Delta u$  positivo

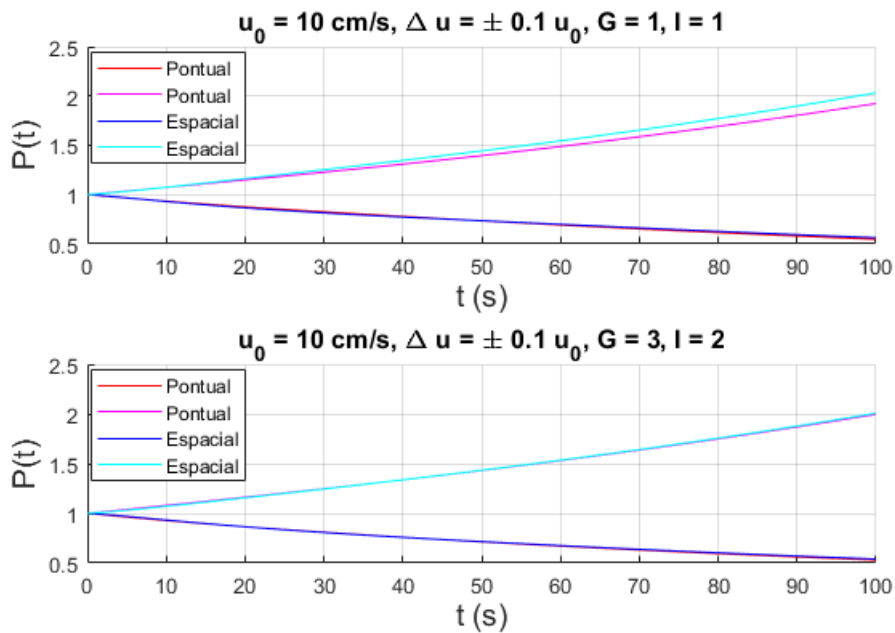


Figura 5.9: Transiente pela perturbação na velocidade:  $\Delta u = \pm 0.1 u_0$ ,  $u_0 = 10 \text{ cm/s}$ .  
 Curvas crescentes:  $\Delta u$  negativo. Curvas decrescentes:  $\Delta u$  positivo

As figuras 5.8 e 5.9 indicam que o comportamento da cinética pontual para a velocidade de  $10 \text{ cm/s}$  é basicamente a mesma que para  $1 \text{ cm/s}$ , continuando a aproximar bem a cinética espacial. O erro é menor quando se considera mais de um

grupo de energia e de precursores e quanto menor for a perturbação  $|\Delta u|$ .

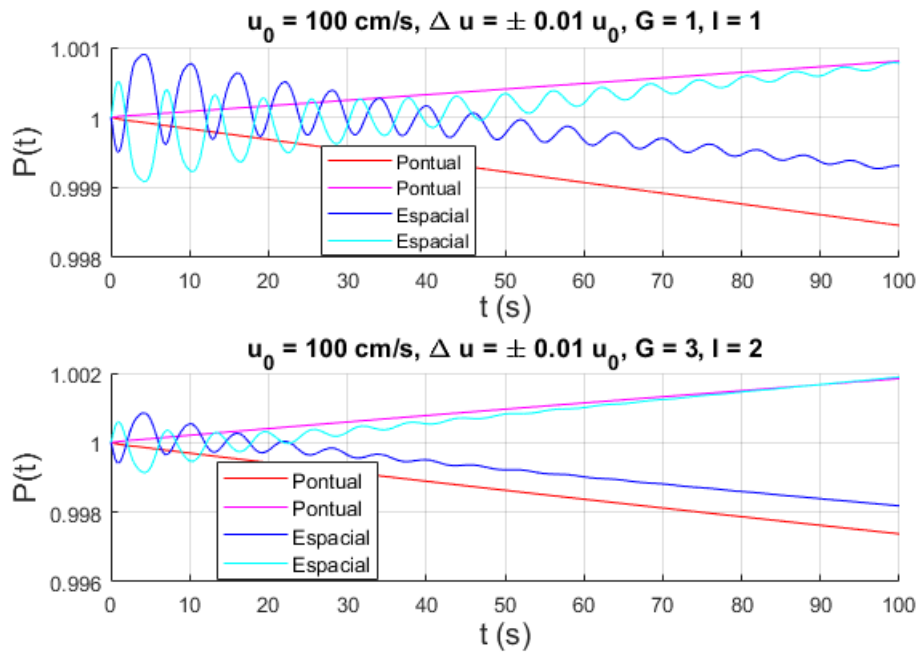


Figura 5.10: Transiente pela perturbação na velocidade:  $\Delta u = \pm 0.01 u_0$ ,  $u_0 = 100 \text{ cm/s}$ .  
Curvas magenta e ciano:  $\Delta u$  negativo. Curvas vermelha e azul:  $\Delta u$  positivo

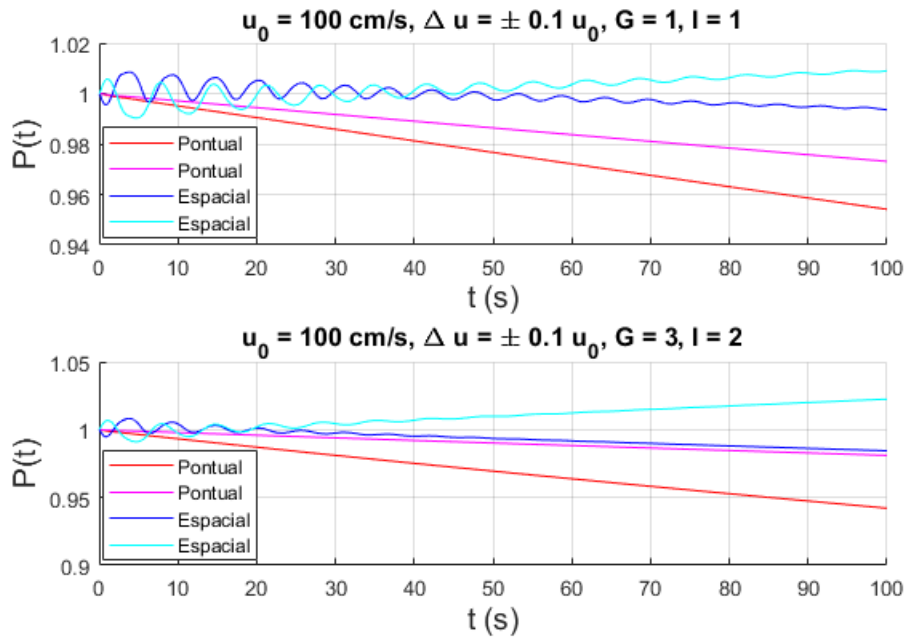


Figura 5.11: Transiente pela perturbação na velocidade:  $\Delta u = \pm 0.1 u_0$ ,  $u_0 = 100 \text{ cm/s}$ .  
Curvas magenta e ciano:  $\Delta u$  negativo. Curvas vermelha e azul:  $\Delta u$  positivo

Na velocidade de  $100 \text{ cm/s}$ , mostrada nas figuras 5.10 e 5.10, acontece outro fenômeno próprio de sistemas com combustível líquido. Devido às equações diferenciais da cinética espacial serem do tipo atrasadas, é possível que ocorram oscilações com intervalos aproximadamente iguais à constante de atraso ( $\tau$ ), causadas pela reentrada dos precursores.

Pelas figuras 5.10 e 5.10 pode-se ver que o modelo de cinética pontual usado começa a falhar, resultando em soluções com altos erros, como no caso de  $\Delta u = \pm 0.01 u_0$ , e até mesmo em soluções que não representam mais o comportamento do sistema, como é o caso de  $\Delta u = -0.1 u_0$ , na qual uma perda de velocidade não resulta no aumento da potência, como é indicado pela cinética espacial.

### 5.3 Transientes na Aproximação de *Prompt-Jump*

A seguir serão apresentados os resultados da aproximação de *prompt-jump*, que é uma aproximação comumente feita na cinética pontual de reatores com combustível sólido. Serão comparadas as soluções da cinética pontual para 1 grupo de energia e 1 grupo de precursores, com e sem a aproximação de *prompt-jump*, para velocidades de escoamento de 1, 10, 100 e  $1000 \text{ cm/s}$ . O transiente considerado será o mesmo da seção 5.1: perturbação na seção de choque de fissão.

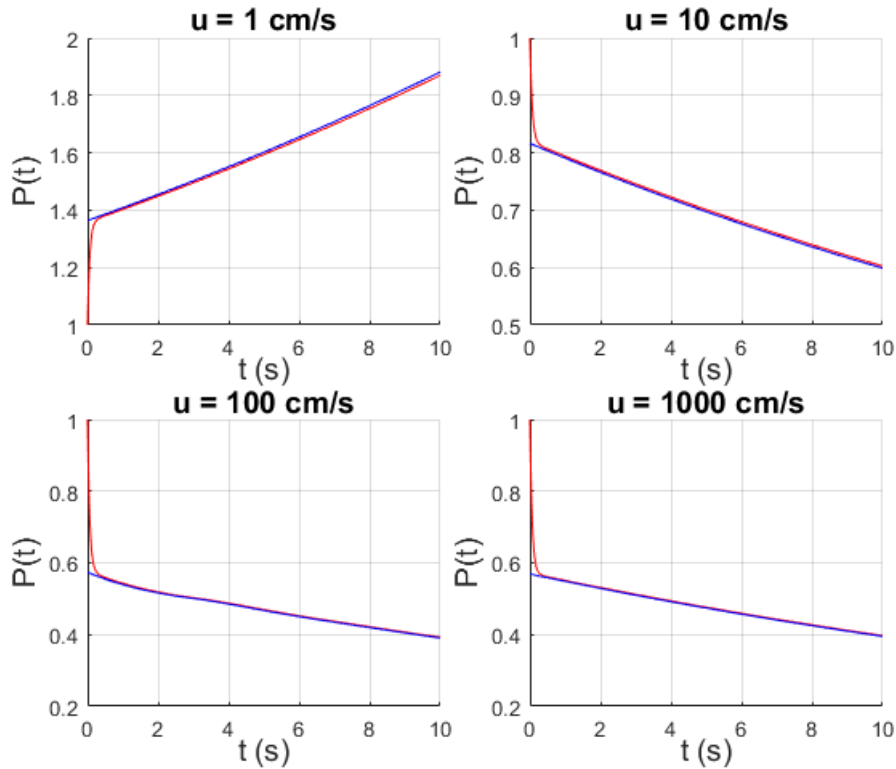


Figura 5.12: Cinética pontual com (curva azul) e sem (curva vermelha) aproximação de *prompt-jump*

O parâmetro de tempo médio de geração  $\Lambda_P$  calculado foi de  $2.69 \times 10^{-4} s$ . Apesar de não ser tão pequeno, o valor desse parâmetro é suficiente para que a aproximação de *prompt-jump* reproduza a cinética pontual com um erro pequeno, sendo maior apenas nos primeiros segundos, como visto na figura 5.12, além também de as reatividades consideradas não serem muito altas, em módulo. Na solução exata, a variação da potência no início do transiente é a resposta do sistema na escala de tempo da vida média dos nêutrons prontos ( $\Lambda_P$ ), sendo seguida por uma variação mais lenta característica dos nêutrons atrasados. A aproximação de *prompt-jump* consiste apenas em considerar instantânea essa primeira variação ( $\Lambda_P \approx 0$ ), restando apenas a forma assintótica da potência [9].

# Capítulo 6

## Conclusões

Pelos resultados apresentados, pôde-se verificar as limitações do modelo de cinética pontual proposto por LAPENTA *et al.* [4]. Enquanto que esse modelo aproxima muito bem a cinética espacial para transientes causados por perturbações nos parâmetros nucleares, ele começa a falhar para perturbações na velocidade de escoamento do sistema, podendo até gerar resultados errados, como é o caso para grandes perturbações ( $|\Delta u| > 0.1u_0$ ) ou para velocidades altas ( $u_0 > 100 \text{ cm/s}$ ).

A limitação desse modelo é devido à aproximação feita na concentração de precursores, na qual se admite uma separação entre a parte espacial e a parte temporal, assumindo que a forma espacial é constante durante todo o transiente. Enquanto que essa aproximação funciona para o fluxo, ela falha para os precursores, pois a forma espacial de suas concentrações varia significativamente para diferentes velocidades, como pode ser visto na figura 2.1 do capítulo 2. Apesar de ser uma aproximação válida no caso de perturbações nos parâmetros nucleares, ela não é válida quando há perturbações na velocidade de escoamento.

Uma possível solução para esse problema seria recalcular a forma espacial da concentração de precursores em intervalos fixos de tempo e atualizar os parâmetros cinéticos, analogamente ao que é feito na cinética pontual de combustível sólido quando há perturbações localizadas.

Também foi analisada a aproximação de *prompt-jump* na cinética pontual, constatando que o comportamento do sistema de combustível líquido é semelhante ao sólido, em relação à aplicabilidade dessa aproximação, além de ter sido útil para possibilitar uma solução analítica para o problema e ser usada como validação do método numérico utilizado.

Para trabalhos futuros seguindo a linha de reatores a combustível líquido circulante, poderia ser feita a mesma comparação entre a cinética pontual e a espacial, porém levando em consideração efeitos de realimentação, como a variação de temperatura, por exemplo. Outro possível trabalho seria obter um modelo diferente para a cinética pontual que seja mais preciso, baseado em aproximações mais realistas em relação à física do problema.

# Referências Bibliográficas

- [1] WIKIPEDIA. *Aircraft Nuclear Propulsion*. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Aircraft\\_Nuclear\\_Propulsion](https://en.wikipedia.org/wiki/Aircraft_Nuclear_Propulsion)>. Acesso em: 04 fev. 2018.
- [2] WIKIPEDIA. *Molten-Salt Reactor Experiment*. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Molten-Salt\\_Reactor\\_Experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Molten-Salt_Reactor_Experiment)>. Acesso em: 04 fev. 2018.
- [3] SEABORG TECHNOLOGIES. *Seaborg Wasteburner Molten Salt Reactor*, 2015. Disponível em: <<https://seaborg.dk/s/Seaborg-whitepaper-2015.pdf>>. Acesso em: 04 fev. 2018.
- [4] LAPENTA, G., MATTIODA, F., RAVETTO, P., “Point Kinetic Model for Fluid Fuel Systems”, *Annals of Nuclear Energy*, v. 28, pp. 1759–1772, 2001.
- [5] HENRY, A. F., *Nuclear-Reactor Analysis*. Cambridge, The MIT Press, 1975.
- [6] NORTHROP, P. W. C., RAMACHANDRAN, P. A., SCHIESSER, W. E., *et al.*, “A Robust False Transient Method of Lines for Elliptic Partial Differential Equations”, *Chemical Engineering Science*, v. 90, pp. 32–39, 2013.
- [7] BELL, G. I., GLASSTONE, S., *Nuclear Reactor Theory*. New York, Van Nostrand Reinhold, 1970.
- [8] SUN YI, NELSON, P. W., ULSOY, A. G., *Time-Delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W Function*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.
- [9] DUDERSTADT, J. J., HAMILTON, L. J., *Nuclear Reactor Analysis*. New York, John Wiley & Sons Ltd., 1976.
- [10] FUCHS, D., TABACHNIKOV, S., *Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics*. Rhode Island, American Mathematical Society, 2000.
- [11] MOIN, P., *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*. New York, Cambridge University Press, 2010.

- [12] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., *Numerical Analysis*. Boston, Cengage Learning, 2010.
- [13] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 7 ed. New York, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [14] PALMA, D. A. P., NUNES, A. L., MARTINEZ, A. S., “Effect of the time variation of the neutron current density in the calculation of the reactivity”, *Annals of Nuclear Energy*, v. 96, pp. 204–211, 2016.

# Apêndice A

## Solução Trivial do Caso Estacionário

Na seção 2.2, foi visto que a solução para o fluxo é dada por:

$$\phi(z) = A_1 e^{r_1 z} + A_2 e^{r_2 z} + A_3 e^{r_3 z} \quad (\text{A.1})$$

na qual  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são dados pela solução da equação característica:

$$r^3 + \frac{\lambda}{u} r^2 + B^2(k)r + \frac{\lambda}{u} B_m^2(k) = 0 \quad (\text{A.2})$$

No entanto, quando o discriminante dessa equação é nulo, há raízes degeneradas. Nos casos estudados, verificou-se que apenas duas das raízes são degeneradas. Nesse caso, a expressão para o fluxo fica [13]:

$$\phi(z) = A_1 e^{r_1 z} + (A_2 + A_3 z) e^{r_2 z} \quad (\text{A.3})$$

Fazendo a substituição  $r = s - \lambda/(3u)$ , reduz-se a equação característica para uma forma mais conveniente de ser resolvida e de se escrever seu discriminante:

$$s^3 + p(k)s + q(k) = 0 \quad (\text{A.4})$$

sendo:

$$p(k) \equiv B^2(k) - \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{u^2} \quad (\text{A.5a})$$

$$q(k) \equiv \frac{2}{27} \frac{\lambda^3}{u^3} + \frac{\lambda}{u} \left[ B_m^2(k) - \frac{1}{3} B^2(k) \right] \quad (\text{A.5b})$$

$$\Delta(k) \equiv \left[ \frac{p(k)}{3} \right]^3 + \left[ \frac{q(k)}{2} \right]^2 \quad (\text{A.5c})$$

Escreve-se  $p(k)$  e  $q(k)$  da seguinte forma:

$$p(k) = (a_1 k + a_2) \frac{1}{k} \quad (\text{A.6a})$$



$$q(k) = (a_3k + a_4)\frac{1}{k} \quad (\text{A.6b})$$

na qual:

$$a_1 \equiv -\frac{\Sigma_a}{D} - \frac{1}{3}\frac{\lambda^2}{u^2} \quad (\text{A.7a})$$

$$a_2 \equiv \frac{(1-\beta)\nu\Sigma_f}{D} \quad (\text{A.7b})$$

$$a_3 \equiv \frac{2}{27}\frac{\lambda^3}{u^3} - \frac{2}{3}\frac{\Sigma_a}{D}\frac{\lambda}{u} \quad (\text{A.7c})$$

$$a_4 \equiv \frac{(2+\beta)\nu\Sigma_f}{3D}\frac{\lambda}{u} \quad (\text{A.7d})$$

O valor de  $k$  que torna o discriminante nulo é chamado de  $k_0$ . Desenvolvendo a expressão do discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta(k_0) &= 0 \\ \left(a_1k_0 + a_2\right)^3 \frac{1}{27k_0^3} + \left(a_3k_0 + a_4\right)^2 \frac{1}{4k_0^2} &= 0 \\ \left(4a_1^3 + 27a_3^2\right)k_0^3 + \left(12a_1^2a_2 + 54a_3a_4\right)k_0^2 + \left(12a_1a_2^2 + 27a_4^2\right)k_0 + 4a_2^3 &= 0 \end{aligned}$$

A expressão para  $k_0$  fica:

$$k_0^3 + b_1k_0^2 + b_2k_0 + b_3 = 0, \quad (\text{A.8})$$

com os coeficientes dados por:

$$b_1 \equiv \frac{12a_1^2a_2 + 54a_3a_4}{4a_1^3 + 27a_3^2} \quad (\text{A.9a})$$

$$b_2 \equiv \frac{12a_1a_2^2 + 27a_4^2}{4a_1^3 + 27a_3^2} \quad (\text{A.9b})$$

$$b_3 \equiv \frac{4a_2^3}{4a_1^3 + 27a_3^2} \quad (\text{A.9c})$$

Essa equação possui apenas uma solução real e é dada por [10]:

$$k_0 = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\delta}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\delta}} - \frac{b_1}{3}, \quad (\text{A.10})$$

na qual  $P$ ,  $Q$  e  $\delta$  são definidos por:

$$P \equiv b_2 - \frac{b_1^2}{3} \quad (\text{A.11a})$$

$$Q \equiv \frac{2}{27}b_1^3 - \frac{b_1b_2}{3} + b_3 \quad (\text{A.11b})$$

$$\delta \equiv \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2 \quad (\text{A.11c})$$

Para resolver a equação (A.4) quando o discriminante é nulo (duas raízes iguais), usa-se as relações entre as raízes:

$$s_1 + 2s_2 = 0 \quad (\text{A.12a})$$

$$2s_1s_2 + s_2^2 = p(k_0) \quad (\text{A.12b})$$

$$s_1s_2^2 = -q(k_0) \quad (\text{A.12c})$$

Assim:

$$s_1 = -2s_2 \quad (\text{A.13a})$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{-p(k_0)}{3}} \quad (\text{A.13b})$$

Com isso, as raízes podem ser calculadas analiticamente:

$$r_1 = -2\sqrt{\frac{1}{9}\frac{\lambda^2}{u^2} - \frac{1}{3}B^2(k_0)} - \frac{1}{3}\frac{\lambda}{u} \quad (\text{A.14a})$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{9}\frac{\lambda^2}{u^2} - \frac{1}{3}B^2(k_0)} - \frac{1}{3}\frac{\lambda}{u} \quad (\text{A.14b})$$

Aplicando as condições de contorno na equação (A.3):

$$\phi(0) = 0 = \phi(H) \quad (\text{A.15a})$$

$$\left. \frac{d^2\phi}{dz^2} \right|_{z=0} = \xi \left. \frac{d^2\phi}{dz^2} \right|_{z=H} \quad (\text{A.15b})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{r_1H} & e^{r_2H} & He^{r_2H} \\ r_1^2(1 - e^{r_1H}\xi) & r_2^2(1 - e^{r_2H}\xi) & r_2[2 - (2 + r_2H)e^{r_2H}\xi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

O determinante dessa matriz é dado por:

$$f_0(k_0) = r_2[2 - (2 + r_2H)e^{r_2H}\xi](e^{r_2H} - e^{r_1H}) + [r_1^2(1 - e^{r_1H}\xi) - r_2^2(1 - e^{r_2H}\xi)]He^{r_2H} \quad (\text{A.17})$$

Logo, a condição de criticalidade é dada pelas raízes da função definida por partes:

$$F(k) = \begin{cases} f(k) & \text{se } k \neq k_0 \\ f_0(k) & \text{se } k = k_0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Lembrando a definição de  $f(k)$  em (2.17):

$$f(k) \equiv r_1^2 \left(1 - e^{r_1 H \xi}\right) \left(e^{r_3 H} - e^{r_2 H}\right) + r_2^2 \left(1 - e^{r_2 H \xi}\right) \left(e^{r_1 H} - e^{r_3 H}\right) + r_3^2 \left(1 - e^{r_3 H \xi}\right) \left(e^{r_2 H} - e^{r_1 H}\right) \quad (\text{A.19})$$

Resta mostrar que  $k_0$ , apesar de satisfazer  $f(k_0) = 0$ , não satisfaz  $f_0(k_0) = 0$ , levando, assim, a uma solução trivial para o problema. A seguir, é apresentado o valor de  $f_0(k_0)$  para algumas velocidades de escoamento:

Tabela A.1: Determinante  $f_0$

$u$ (cm/s)	$k_0$	$f_0(k_0)$
1	1.00693678	$2.802 \times 10^0$
10	1.00573232	$2.347 \times 10^{-1}$
100	1.00253988	$1.425 \times 10^{-2}$

Como o determinante é calculado apenas com uma aproximação numérica, mesmo uma matriz singular poderia ter um determinante não-nulo, então apenas o valor não é o suficiente para garantir que a matriz seja singular ou não. Para isso, compara-se o valor de  $f_0(k_0)$  com o valor de  $f(k)$  em um dado intervalo, como é mostrado nos gráficos seguintes:

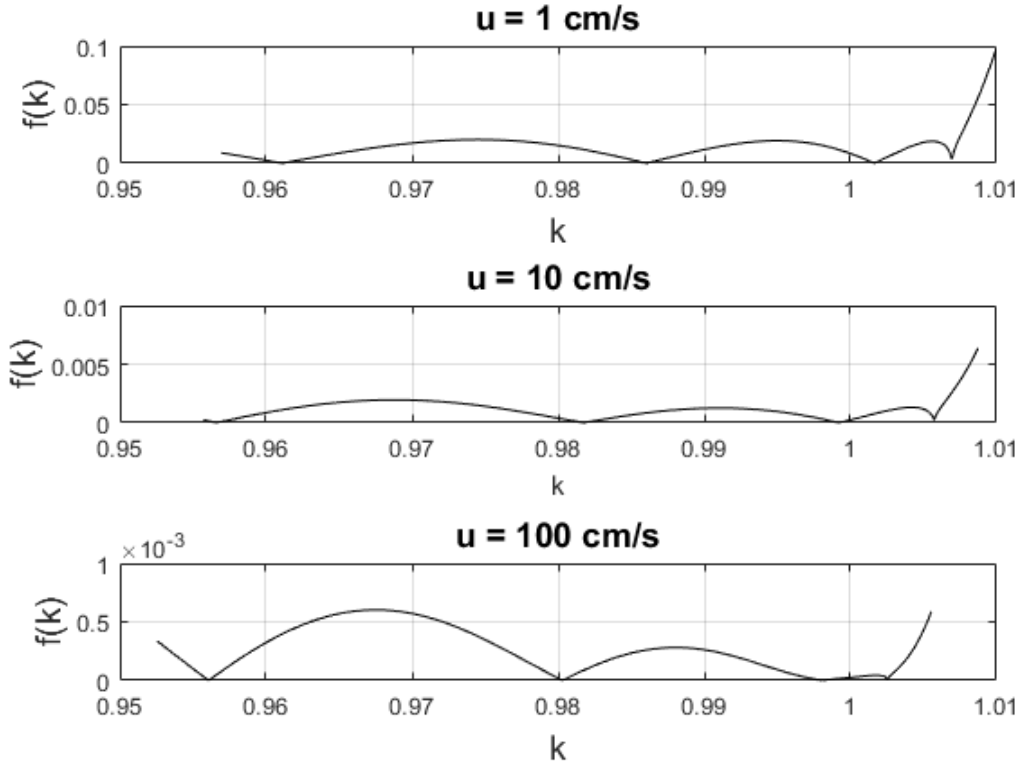


Figura A.1: Gráficos do módulo de  $f(k)$  para  $u = 1 \text{ cm/s}$ ,  $u = 10 \text{ cm/s}$  e  $u = 100 \text{ cm/s}$

Nos gráficos da figura A.1, pode-se ver que todos os pontos de  $f(k)$  possuem várias ordens de grandeza abaixo de  $f_0(k_0)$ , para cada velocidade. Assim, pode-se garantir que o determinante  $f_0(k_0)$  não se anula e a matriz em (A.16) não é singular, ou seja, há apenas a solução trivial quando  $k = k_0$ .

Dessa forma, o fator de multiplicação efetivo será a segunda maior raiz de  $f(k)$  (A.19) ou, de forma equivalente, a maior raiz de  $F(k)$  (A.18), e está associado à forma espacial assintótica do fluxo de nêutrons.

Os dados numéricos utilizados encontram-se no Apêndice B.

# Apêndice B

## Dados Numéricos

Os dados numéricos dos parâmetros nucleares e geométricos utilizados foram retirados de LAPENTA *et al.* [4], com alguns ajustes para que os problemas com 1 e com 3 grupos de energia produzam resultados similares. Para os parâmetros dos precursores, foram utilizados os dados de PALMA *et al.* [14]. Todos os parâmetros cinéticos foram calculados seguindo as definições dadas pelas equações (4.20a) a (4.20i).

### B.1 Dados Usados no Capítulo 2

Tabela B.1: Parâmetros usados no Capítulo 2

$D$	0.8000 $cm$	$\lambda$	0.0848 $s^{-1}$	$N$	600
$\Sigma_a$	0.0168 $cm^{-1}$	$\beta$	0.006172	$\Delta z$	0.5 $cm$
$\nu$	2.8195	$H$	300 $cm$	$\omega$	$3.204 \times 10^{-11} J$
$\Sigma_f$	0.0060 $cm^{-1}$	$L$	300 $cm$		

### B.2 Dados da Validação Numérica do Capítulo 3

Tabela B.2: Parâmetros usados no Capítulo 3

$D$	0.8000 $cm$	$\nu$	2.8195	$H$	300 $cm$	$\Delta t$	0.1 $s$
$\Sigma_a$	0.0168 $cm^{-1}$	$v$	$2.2 \times 10^5 cm/s$	$L$	300 $cm$	$k_{eff}$ ( $u = 1$ )	1.001620
$\Sigma_f$	0.0060 $cm^{-1}$	$\lambda$	0.0848 $s^{-1}$	$N$	600	$k_{eff}$ ( $u = 10^3$ )	0.998075
$\omega$	$3.204 \times 10^{-11} J$	$\beta$	0.006172	$\Delta z$	0.5 $cm$		

Obs: para cada velocidade,  $u = 1 \text{ cm/s}$  e  $u = 1000 \text{ cm/s}$ , o valor da seção de choque macroscópica de fissão usado foi  $\Sigma_f$  dividido pelo respectivo valor de  $k_{eff}$  (valor da seção de choque que torna o sistema crítico).

### B.3 Dados da Validação Numérica do Capítulo 4

Os parâmetros nucleares e geométricos utilizados são os mesmos do capítulo 3, dados na seção anterior, exceto o passo temporal, que passa a ser de  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ .

Tabela B.3: Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4:  $u = 0.1 \text{ cm/s}$

$\rho$	172.11 pcm	$\rho_1$	1.0686 pcm	$\hat{\beta}$	0.0062
$\mu_{u,1}$	$0 \text{ s}^{-1}$	$\mu_{\xi,1}$	$0 \text{ s}^{-1}$	$\sigma_1$	$0 \text{ s}^{-1}$
$\Lambda_1$	0.9996	$\Gamma_1(0)$	0.0727	$k_{eff}$	1.0017318

Tabela B.4: Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4:  $u = 1 \text{ cm/s}$

$\rho$	161.09 pcm	$\rho_1$	0.9782 pcm	$\hat{\beta}$	0.0060
$\mu_{u,1}$	$0 \text{ s}^{-1}$	$\mu_{\xi,1}$	$1.0768 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$	$\sigma_1$	$1.0768 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$
$\Lambda_1$	0.9655	$\Gamma_1(0)$	0.0712	$k_{eff}$	1.0016207

Tabela B.5: Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4:  $u = 10 \text{ cm/s}$

$\rho$	-79.25 pcm	$\rho_1$	-0.2802 pcm	$\hat{\beta}$	0.0035
$\mu_{u,1}$	$0 \text{ s}^{-1}$	$\mu_{\xi,1}$	$0.0030 \text{ s}^{-1}$	$\sigma_1$	$0.0030 \text{ s}^{-1}$
$\Lambda_1$	0.4877	$\Gamma_1(0)$	0.0415	$k_{eff}$	0.9992047

Tabela B.6: Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4:  $u = 100 \text{ cm/s}$

$\rho$	-190.24 pcm	$\rho_1$	-0.4886 pcm	$\hat{\beta}$	0.0026
$\mu_{u,1}$	$0 \text{ s}^{-1}$	$\mu_{\xi,1}$	$0.1630 \text{ s}^{-1}$	$\sigma_1$	$0.1630 \text{ s}^{-1}$
$\Lambda_1$	0.4974	$\Gamma_1(0)$	0.0302	$k_{eff}$	0.9980927

Tabela B.7: Parâmetros cinéticos calculados usados no Capítulo 4:  $u = 1000 \text{ cm/s}$

$\rho$	-191.97 pcm	$\rho_1$	-0.4903 pcm	$\hat{\beta}$	0.0025
$\mu_{u,1}$	$0 \text{ s}^{-1}$	$\mu_{\xi,1}$	$1.6662 \text{ s}^{-1}$	$\sigma_1$	$1.6662 \text{ s}^{-1}$
$\Lambda_1$	0.5000	$\Gamma_1(0)$	0.0300	$k_{eff}$	0.9980753

## B.4 Dados Usados nos Resultados do Capítulo 5

Tabela B.8: Parâmetros geométricos e numéricos usados no Capítulo 5

$H$	300 <i>cm</i>	$L$	300 <i>cm</i>
$N$	600	$\Delta z$	0.5 <i>cm</i>
$\Delta t$ (pontual)	0.001 <i>s</i>	$\Delta t$ (espacial)	0.1 <i>s</i>
$\Delta t$ (prompt-jump)	0.0001 <i>s</i>		

Tabela B.9: Parâmetros nucleares usados nos casos monoenergéticos do Capítulo 5

$D$	0.8000 <i>cm</i>	$\Sigma_a$	0.0168 <i>cm</i> <sup>-1</sup>
$\Sigma_f$	0.0060 <i>cm</i> <sup>-1</sup>	$\nu$	2.8195
$\beta$	0.006172	$\lambda$	0.0848 <i>s</i> <sup>-1</sup>
$v$	$2.2 \times 10^5$ <i>cm/s</i>	$\omega$	$3.204 \times 10^{-11}$ <i>J</i>

Tabela B.10: Parâmetros dos precursores usados nos casos multigrupo do Capítulo 5

$\lambda_1$	0.0128 <i>s</i> <sup>-1</sup>	$\lambda_2$	0.1041 <i>s</i> <sup>-1</sup>
$\beta_1$	0.000197	$\beta_2$	0.005975
$\chi_{1,1}$	0.642	$\chi_{2,1}$	0.566
$\chi_{1,2}$	0.358	$\chi_{2,2}$	0.434
$\chi_{1,3}$	0.000	$\chi_{2,3}$	0.000

Tabela B.11: Seções de choque macroscópicas de espalhamento e remoção, em *cm*<sup>-1</sup>, usadas nos casos multigrupo do Capítulo 5

$\Sigma_{R,1}$	0.019922	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$	0.019700	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 3}$	0
$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}$	0	$\Sigma_{R,2}$	0.007070	$\Sigma_{s,2 \rightarrow 3}$	0.005940
$\Sigma_{s,3 \rightarrow 1}$	0	$\Sigma_{s,3 \rightarrow 2}$	0	$\Sigma_{R,3}$	0.016800

Tabela B.12: Outros parâmetros nucleares usados nos casos multigrupo do Capítulo 5

$D_1$	1.340 <i>cm</i>	$D_2$	0.761 <i>cm</i>	$D_3$	0.800 <i>cm</i>
$\Sigma_{f,1}$	$4.962 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$	$\Sigma_{f,2}$	$3.706 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$	$\Sigma_{f,3}$	$6.228 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$
$\nu_1$	3.0544	$\nu_2$	2.8293	$\nu_3$	2.8195
$v_1$	$1.0 \times 10^9 \text{ cm/s}$	$v_2$	$3.0 \times 10^7 \text{ cm/s}$	$v_3$	$2.2 \times 10^5 \text{ cm/s}$
$\chi_1$	0.755	$\chi_2$	0.245	$\chi_3$	0.000

## B.5 Dados da Solução Trivial do Apêndice A

Tabela B.13: Parâmetros usados no Apêndice A

$D$	0.8000 <i>cm</i>	$\Sigma_a$	$0.0168 \text{ cm}^{-1}$
$\nu$	2.8195	$\Sigma_f$	$0.0060 \text{ cm}^{-1}$
$\lambda$	$0.0848 \text{ s}^{-1}$	$\beta$	0.006172
$H$	300 <i>cm</i>	$L$	300 <i>cm</i>