



## CÁLCULO DE RECONSTRUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE POTÊNCIA PINO A PINO USANDO MÁXIMA ENTROPIA

Aidano da Silva Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva

José Antônio Carlos Canedo Medeiros

Rio de Janeiro

Setembro de 2018

CÁLCULO DE RECONSTRUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE POTÊNCIA PINO A  
PINO USANDO MÁXIMA ENTROPIA

Aidano da Silva Filho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

---

Prof. Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.

---

Prof. José Antônio Carlos Canedo Medeiros, D.Sc.

---

Dr. Zelmo Rodrigues de Lima, D.Sc.

---

Prof. Hermes Alves Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2018

Silva Filho, Aidano da

Cálculo de Reconstrução da Distribuição de Potência Pino a Pino Usando Máxima Entropia /Aidano da Silva Filho. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XI, 59 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva

José Antônio Carlos Canedo Medeiros

Dissertação (mestrado) - UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Nuclear, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 57-59.

1. Reconstrução pino a pino. 2. Método da Máxima Entropia. 3. Método de Newton-Raphson. I. Silva, Fernando Carvalho da *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título

## **Dedicatória**

Aos meus pais Angelina Bastos da Silva e Aidano da Silva Sobrinho, minha tia Odalea Bastos da Silva e minha namorada Jessica de Mello Pereira Nadaes.

## **Agradecimento**

Agradeço a Deus por toda força e iluminação.

Aos responsáveis pela minha formação, incentivadores e investidores das minhas empreitadas, meus pais Aidano da Silva Sobrinho, Angelina Bastos da Silva e minha tia Odalea Bastos da Silva.

A minha namorada Jessica de Mello Pereira Nadaes por todo apoio e compreensão. Aos familiares e amigos que sempre me apoiaram e compreenderam minha ausência nesse período.

Aos meus orientadores Fernando Carvalho da Silva e José Antonio Carlos Canedo Medeiros que sempre tiveram extrema paciência, respeito, dedicação e humanidade na orientação.

Aos professores e funcionários do Programa de Engenharia Nuclear aos quais tive contato e sempre estiveram dispostos a ajudar.

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio e bolsa concedida para essa pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## CÁLCULO DE RECONSTRUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE POTÊNCIA PINO A PINO USANDO MÁXIMA ENTROPIA

Aidano da Silva Filho

Setembro/2018

Orientadores: Fernando Carvalho da Silva

José Antonio Carlos Canedo Medeiros

Programa: Engenharia Nuclear

Neste trabalho foi desenvolvido um método de reconstrução da distribuição heterogênea de densidade de potência pino a pino utilizando o Método da Máxima Entropia (MME) e os resultados de um cálculo nodal de malha grossa. O MME necessita tanto da discretização da equação da difusão de nêutrons, em malhas da dimensão de uma célula (pino) de combustível, quanto de distribuições de fluxos, normalizadas a um, para cada face de um Elemento Combustível (EC). Estas distribuições de fluxos nas faces do EC são obtidas, nesta dissertação, através de uma solução analítica da equação de difusão de nêutrons, no EC homogeneizado, juntamente com o MME. A distribuição heterogênea de densidade potência é obtida através do método de modulação, que é o produto da função forma de potência pela distribuição homogênea de densidade de potência do EC homogeneizado. Esta distribuição homogênea de densidade de potência é obtida utilizando o MME e a solução da equação da difusão de nêutrons, discretizada em malhas da dimensão de uma célula de combustível. Os resultados obtidos com este método de reconstrução, quando comparados com aqueles de referência, apresentaram como maior desvio 11,3% em uma célula na periferia do EC junto a região de baffle/refletor, para o reator EPRI. Para as demais células de outros ECs, deste reator, os desvios são muito menores do que este maior desvio.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

OBTAINING THE NEUTRON FLOW FROM PIN TO PIN THROUGH THE MAX  
ENTROPY METHOD

Aidano da Silva Filho

September/2018

Advisors: Fernando Carvalho da Silva

José Antonio Carlos Canedo Medeiros

Department: Nuclear Engineering

In this research was develop a method for reconstruction pin to pin of the heterogeneous power density distribution using the method of maximum entropy (MME) and the results from a rough mesh nodal calculation. The MME requires a discretization of the neutrons diffusion equation in mesh with a dimension of a fuel cell (pine) as well flow distribution, normalized to one, for each face of a Fuel Element (FE). In this essay, the flow distributions on the faces of a Fuel Element are obtained by MME together with an analytical solution of the neutrons diffusion equation on the homogenized FE. The heterogeneous power density distribution is obtained by a modulation method that is the result of the form function of power and homogenous power density distribution of the homogenized EC. That homogenous power density distribution is obtained using MME and the solution of the neutrons diffusion equation discretized in mesh with a dimension of a fuel cell. The results obtained by this method of reconstruction, when compared with the benchmark ones, reached 11.3% as the highest deviation in a cell from the periphery of the Fuel Element. The cells from the other FE of that reactor reached an extremely lower deviation when compared with the highest one.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1 Natureza e Dificuldades do Problema .....	1
1.2 Revisão Bibliográfica .....	2
1.3 Objetivo do Trabalho .....	4
1.4 Divisão do Trabalho .....	5
<b>2 Método de Expansão Nodal (NEM)</b> .....	<b>7</b>
2.1 Introdução .....	7
2.2 Parâmetros dos Cálculos de Homogeneização .....	7
2.3 Grandezas dos Cálculos de Malha Grossa (NEM) .....	8
<b>3 Discretização da Equação da Difusão de Nêutrons</b> .....	<b>10</b>
3.1 Introdução .....	10
3.2 Distribuição Homogênea de Fluxo de Nêutrons .....	11
<b>4 Método da Máxima Entropia</b> .....	<b>19</b>
4.1 Introdução .....	19
4.2 Princípio da Máxima Entropia .....	19
4.3 Cálculo das Distribuições de Probabilidades .....	22
4.4 Método de Newton-Raphson .....	24
<b>5 Distribuição de Densidade de Potência Heterogênea Pino a Pino</b> .....	<b>27</b>
5.1 Introdução .....	27
5.2 Densidade de Potência Homogênea Pino a Pino .....	27
5.3 Método de Modulação .....	27
5.4 Procedimentos para a reconstrução .....	28
<b>6 Apresentação e Discussão de Resultados</b> .....	<b>30</b>
6.1 Reator de Referência .....	30
6.2 Resultados do Cálculo Nodal de Malha Grossa .....	34
6.3 Multiplicadores de Lagrange .....	36
6.4 Distribuições de Probabilidades nas Faces dos ECs .....	37
6.5 Normalização das Densidades de Potência Reconstruída e de Referência .....	48
<b>7 Conclusão</b> .....	<b>55</b>
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>57</b>

# Lista de Figuras

2.1 Parâmetros do processo de homogeneização .....	7
2.2 Resultados do NEM .....	8
3.1 EC (nodo n) dividido em malhas de dimensão de uma célula de combustível.....	10
3.2 Célula com as correntes médias nas faces e fluxo médio na célula .....	12
3.3 Célula com os fluxos médios nas faces .....	14
3.4 Regiões de continuidade e face voltada para contorno .....	14
3.5 Relação entre os fluxos de uma célula ( $\ell, k$ ) com suas células vizinhas .....	16
6.1 Configuração de um quarto de núcleo do reator EPRI.....	30
6.2 Geometria heterogênea do elemento combustível.....	31
6.3 Geometria espectral para homogeneização da região baffle / refletor .....	32
6.4 Geometria espectral para homogeneização da região baffle / refletor com baffle em forma de L .....	33
6.5 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 1, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	38
6.6 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 2, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	39
6.7 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 3, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	40
6.8 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 5, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	41
6.9 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 6, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	42
6.10 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 1, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	43
6.11 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 2, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	44
6.12 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 3, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	45
6.13 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 5, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	46

6.14 Distribuições de probabilidades nas faces do EC 6, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b).....	47
6.15 Distribuições de densidade de potência de referência e reconstruída.....	53
6.16 Distribuição dos desvios entre as densidades de potência de referência e reconstruída .....	54

# Lista de Tabelas

1.1 Procedimentos adotados na reconstrução .....	5
6.1 Parâmetros nucleares homogêneos dos ECs .....	32
6.2 Fatores de descontinuidade nas faces dos ECs .....	32
6.3 Parâmetros nucleares homogêneos das regiões de baffle / refletor .....	33
6.4 Fatores de descontinuidade para regiões de baffle / refletor .....	33
6.5 Valores médios obtidos do NEM2D para o núcleo do reator EPRI-9 .....	35
6.6 Multiplicadores de Lagrange .....	36
6.7 Desvios máximos de potência para os diferentes ECs .....	49
6.8 Desvios (%) na distribuição de densidade de potência pino a pino para o EC 3 .....	50
6.9 Desvios (%) na distribuição de densidade de potência pino a pino para o EC 6 .....	51

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Natureza e Dificuldades do Problema

A atribuição mais importante da Física de Reatores é analisar o comportamento dos nêutrons no núcleo de um reator nuclear, onde a grandeza mais relevante, para esta análise, é a distribuição de fluxo de nêutrons no interior do núcleo. O conhecimento desta distribuição é fundamental para a segurança nuclear, pois através dela é possível estimar a distribuição de densidade de potência no núcleo, além de outros parâmetros importantes para segurança dos reatores. Vale lembrar que a norma CNEN NN 1.14 (CNEN,2002) prevê, no Relatório do Projeto Nuclear e Termohidráulico, que os limites de máxima densidade de potência linear, fator total de canal quente e fator de canal quente de entalpia nuclear sejam fornecidos. Para o cálculo desses limites é necessário determinar a distribuição de densidade de potência pino a pino, portanto, o conhecimento dessa distribuição é importante para a segurança da operação do reator.

Os métodos mais utilizados para a determinação da distribuição de fluxo de nêutrons são aqueles que discretizam espacialmente a equação da difusão de nêutrons em malhas finas. Segundo Conti Filho (2005) esses métodos são simples e fornecem bons resultados, por isso, eles são utilizados para produzir soluções de referência para os modelos de benchmarks utilizados na Física de Reatores.

Entretanto, para grandes reatores como os encontrados nas usinas de Angra I e II, que são do tipo PWR, existe um alto custo computacional ao se utilizar métodos de discretização espacial de malha fina, na análise do comportamento neutrônico dos núcleos destas usinas. Isto é devido a milhares de varetas combustíveis, barras de controle, buracos de água e veneno queimável presentes no núcleo do reator. O enorme número de malhas, decorrentes desta discretização espacial, exige a alocação de um grande espaço de memória e também leva a um alto esforço de processamento, fazendo com que o tempo de cálculo da distribuição de fluxo de nêutrons pino a pino fique muito longo e custoso.

Para conseguir diminuir o custo computacional do cálculo da distribuição de fluxo de nêutrons, foram desenvolvidos métodos nodais de malha grossa, que partem do

princípio que grandes regiões do núcleo do reator possuem parâmetros nucleares uniformes, ou seja, que não variam espacialmente no interior destas regiões. Segundo (FINNEMANN et al., 1977), os métodos nodais permitem usar malhas com o tamanho da área transversal de um elemento combustível (EC), diminuindo assim a alocação de espaço de memória e também o tempo computacional de cálculo, mantendo, porém, boa precisão para a obtenção da distribuição de fluxo de nêutrons.

Embora atualmente os métodos nodais de malha grossa sejam muito utilizados na Física de Reatores, o cálculo global do núcleo do reator, usando estes métodos, não fornece a informação pino a pino da distribuição do fluxo de nêutrons, pois estes métodos fornecem apenas valores médios em grandes regiões, chamadas nodos. Os dados obtidos dos cálculos nodais de malha grossa são os fluxos médios no volume do nodo, as correntes parciais médias nas áreas de cada uma das faces do nodo e o fator de multiplicação efetivo.

Então, para determinar a distribuição de fluxo de nêutrons pino a pino e, conseqüentemente, a distribuição de densidade de potência, a partir dos valores médios dos cálculos nodais de malha grossa, técnicas de reconstrução destas distribuições foram desenvolvidas. Muitas destas técnicas utilizam o método de modulação, que é o produto da distribuição homogênea de densidade de potência do EC homogeneizado por uma função forma de potência (Pessoa, 2014), que é obtida no processo de cálculo de homogeneização de EC.

Esta dissertação, que tem como objetivo o desenvolvimento de um método de reconstrução da distribuição de densidade de potência pino a pino utilizando o Método da Máxima Entropia e os resultados de um cálculo nodal de malha grossa, também faz uso do método de modulação.

Mas, existem diversos métodos de reconstrução da distribuição de densidade de potência pino a pino disponíveis na literatura e uma pequena revisão bibliográfica com uma breve descrição de alguns destes métodos é apresentada na próxima seção.

## **1.2 Revisão Bibliográfica**

Os métodos de reconstrução dependem do conhecimento da distribuição homogênea do fluxo, desse modo Koebke e Wagner (1977) propuseram uma expansão polinomial de quarto grau, nos dois grupos de energia, para a distribuição homogênea do fluxo. Os coeficientes da expansão são obtidos utilizando resultados do cálculo nodal.

Já Koebke e Hetzelt (1985) utilizaram, para a distribuição homogênea do grupo rápido, o mesmo procedimento visto em Koebke e Wagner (1977), entretanto, para determinar o fluxo do grupo térmico, é feito um produto do fluxo rápido por uma expansão em funções hiperbólicas.

Böer e Finneemann (1992), utilizaram para a distribuição homogênea, a solução analítica da equação da difusão bidimensional, onde as condições de contorno utilizadas foram os fluxos médios nas faces e os fluxos nos cantos dos nodos. Os fluxos nos cantos foram calculados pelo método de diferenças finitas.

Joo et al. (1999) também utilizaram a solução analítica para equação da difusão, porém as condições de contorno foram as correntes líquidas nas faces dos nodos, e também, os fluxos médios nos cantos, que foram obtidos pelo CPB (Corner Point Balance). Nesse cálculo impõe-se a restrição física, que não haja nenhum acúmulo de nêutrons dentro de um volume infinitesimal, sendo essa condição válida em cada canto.

Pessoa et al. (2016) combinaram a solução da equação da difusão, discretizada por diferenças finitas, com a distribuição dos fluxos nas quatro faces do nodo. Os fluxos nas faces foram obtidos por uma expansão polinomial unidimensional de quarta ordem, enquanto que para a determinação dos coeficientes utilizou-se três fluxos médios nas faces de três nodos consecutivos, e também, dois fluxos médios nos cantos entre esses três nodos. Para a determinação dos fluxos nos cantos dos nodos foi feita uma expansão polinomial unidimensional, de terceira ordem, com os coeficientes obtidos a partir dos quatro fluxos médios nas faces de quatro nodos consecutivos.

Outro método capaz de obter a distribuição homogênea, conhecendo as informações do cálculo nodal, é o Método da Máxima Entropia (MME). O MME é utilizado para resolver problemas inversos, onde ele avalia os dados disponíveis e fornece a distribuição de probabilidade menos tendenciosa, e a que melhor se ajusta ao problema, onde a Entropia representa a medida da informação que falta ou da incerteza (PRESSÉ et al., 2013).

O conceito de Entropia surge primeiramente na física, no estudo dos gases, para entender como converter calor em movimento, entendimento crucial para a revolução industrial (PRESSÉ et al., 2013). O conceito de entropia foi cunhado por Clausius, porém Boltzmann deu uma interpretação estatística para o conceito físico, que tem como objetivo caracterizar o grau de desordem de um sistema (Brush, 1976). Segundo Jaynes

(1957), embora não haja uma relação direta entre os estudos de termodinâmica e teoria da informação, elas são regidas pela mesma equação, o que possibilita encontrar novos pontos de vista, nos quais a termodinâmica e a entropia da informação são equivalentes.

O trabalho de Shannon (1948) foi pioneiro na quantificação da informação em uma mensagem, esse conceito foi formalizado com aplicações na teoria da informação e estatística, porém ela apresenta aplicabilidade em diversas áreas como pode ser visto nos trabalhos de Abbas (2006), onde o método é empregado para o estudo de tomada de decisão em uma empresa do Vale do Silício; Barros Neto et al (1998), que utiliza a Máxima Entropia para fazer análise de solo em Rondônia no Brasil; e Crawford et al. (2013), onde o MME, é utilizado para a reconstrução do fluxo de nêutrons para um arranjo crítico de  $^{235}\text{U}$ .

Jung e Cho (1991) foram pioneiros na aplicação do MME na reconstrução do fluxo de nêutrons. Nesse trabalho eles não utilizaram um cálculo nodal, por não possuírem um programa de cálculo nodal confiável, desse modo os valores médios foram obtidos a partir do cálculo de malha fina. A discretização foi feita para um EC heterogêneo, sem homogeneização, e a função forma não foi utilizada. Os fluxos de referências foram obtidos com os mesmos cálculos de malha fina, e o reator utilizado não possuía nem baffle e nem refletor.

Já Ancalla (2005) desenvolveu um trabalho, que da mesma forma que Jung e Cho (1991), empregou o MME para reconstruir o fluxo de nêutrons, também fazendo a discretização da equação da difusão em EC heterogêneo. Entretanto, por dispor de um programa de cálculo nodal confiável, utilizou o programa NEM2D, desenvolvido no PEN/COPPE/UFRJ, para efetuar o cálculo nodal de malha grossa. Os parâmetros nucleares homogêneos e os dados de referência desse trabalho foram obtidos por cálculos de malha finas. No trabalho de Ancalla (2005) foi usado o mesmo reator utilizado por Jung e Cho (1991), que não considerava nem baffle e nem refletor.

### **1.3 Objetivo do Trabalho**

Como foi visto no item anterior, vários métodos foram propostos para resolver o problema da reconstrução. Neste trabalho o MME é utilizado para reconstruir o fluxo de nêutrons homogêneo e, através dele, determinar a distribuição heterogênea de densidade de potência pino a pino no núcleo do reator.

Este trabalho, da mesma forma que Jung e Cho (1991) e Ancalla (2005), utiliza o MME, entretanto diferente deles, a discretização da equação da difusão foi feita para EC homogêneo, com o reator possuindo baffle e refletor. Os parâmetros médios necessários para esse trabalho foram obtidos do cálculo nodal de malha grossa, igualmente ao desenvolvido por Ancalla (2005). Devido ao reator, neste trabalho, ser para um EC homogêneo utiliza-se a função forma para obter a distribuição heterogênea. A tabela 1.1 mostra as diferenças entre os procedimentos adotados, pelos diferentes autores, na reconstrução utilizando o MME. A marcação com x indica qual procedimento foi adotado por cada autor.

Tabela 1.1 Procedimentos adotados na reconstrução

Procedimento		Jung e Cho	Ancalla	Aidano
Cálculo nodal			x	x
Cálculos de homogeneização			x	x
Discretização da equação da difusão para EC heterogêneo		x	x	
Discretização da equação da difusão para EC homogêneo				x
Núcleo do reator com baffle/ refletor				x
Utilização da função forma				x
Cálculo de malha fina (usando diferenças finitas)	Fluxos (médio na célula) de referência	x	x	x
	Obtenção das grandezas médias	x		
	Obtenção dos parâmetros nucleares homogêneos dos ECs		x	x

#### 1.4 Divisão do Trabalho

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo 2 são mostradas as grandezas do método nodal e da homogeneização; no capítulo 3 é feita a discretização espacial, por diferenças finitas, da equação da difusão à dois grupos de energia, a partir da qual é formulada a equação do fluxo homogêneo pino a pino. Já no capítulo 4 é descrito o Método da Máxima Entropia aplicada ao problema de reconstrução, também será mostrado nesse capítulo, o Método de Newton-Raphson (BYRNE, 2015) para a determinação dos Multiplicadores de Lagrange; no capítulo 5 é mostrado o método de modulação, que será utilizado para determinar a distribuição heterogênea de densidade de potência pino a pino; no capítulo 6 será apresentado o benchmark adotado nesse

trabalho, bem como os resultados obtidos e suas análises para a reconstrução proposta; o último capítulo irá mostrar as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Método de Expansão Nodal (NEM)

### 2.1 Introdução

O método de reconstrução proposto neste trabalho utiliza parâmetros nucleares uniforme em cada EC, obtidos no processo de homogeneização, e as quantidades médias calculadas pelo Método de Expansão Nodal (NEM). Este capítulo apresenta as grandezas que são obtidas tanto pelo processo de homogeneização quanto pelo NEM.

### 2.2 Parâmetros dos Cálculos de Homogeneização

No processo de homogeneização (figura 2.1) é possível obter parâmetros médios que representam regiões homogeneizadas tais como: seção de choque macroscópica de absorção ( $\bar{\Sigma}_{ag}$ ) o produto do número médio de nêutrons emitidos por fissão pela seção de choque macroscópica de fissão ( $\bar{\nu}\bar{\Sigma}_{fg}$ ), o produto da energia média liberada por fissão pela seção de choque macroscópica de fissão ( $\bar{\omega}\bar{\Sigma}_{fg}$ ), a seção de choque macroscópica média de espalhamento de nêutrons do grupo  $g'$  para o grupo  $g$  ( $\bar{\Sigma}_{gg'}$ ), bem como o coeficiente de difusão ( $\bar{D}_g$ ). Desse processo são obtidos também os fatores de descontinuidade e as funções forma de fluxo e de potência, que carregam a informação das heterogeneidades dos ECs. O índice  $n$  representa o nodo a qual o parâmetro está associado.



Figura 2.1 Parâmetros do processo de homogeneização

### 2.3 Grandezas dos Cálculos de Malha Grossa (NEM)

O Método de Expansão Nodal (NEM) (FINNEMANN et al., 1977) propicia uma discretização espacial que trabalha com correntes de interface e tem como ponto de partida as equações de continuidade e a lei de Fick. O NEM, que permite cálculos em malha grossa, possibilita que o núcleo do reator seja dividido em regiões de dimensões iguais a de um EC, essas regiões são chamadas de nodos. Nos nodos os parâmetros nucleares são uniformes.

Os parâmetros obtidos no processo de cálculo de homogeneização são utilizados no cálculo global nodal, onde é possível obter o fator de multiplicação efetivo ( $k_{eff}$ ), os fluxos médios nodais ( $\bar{\phi}_g^n$ ) e as correntes parciais médias nas faces do nodo ( $\bar{J}_{gus}^{\pm n}$ ). A partir das correntes parciais médias são determinados os fluxos médios nas faces do nodo ( $\bar{\psi}_{gus}^n$ ) e as correntes líquidas médias nas faces do nodo ( $\bar{J}_{gus}^n$ ), quais sejam,

$$\bar{\psi}_{gus}^n = 2(\bar{J}_{gus}^{+n} + \bar{J}_{gus}^{-n}) / f_{gus}^n \quad (2.1)$$

e

$$\bar{J}_{gus}^n = \bar{J}_{gus}^{+n} - \bar{J}_{gus}^{-n}, \quad (2.2)$$

onde u representa a direção (que pode ser x ou y), s representa a face (sendo e esquerda ou d direita), g representa o grupo de energia e  $f_{gus}^n$  representa o fator de descontinuidade, obtido no cálculo de homogeneização. A figura 2.2 mostra as grandezas de entrada no NEM, obtidas na homogeneização, e as grandezas de saída do NEM.



Figura 2.2 Resultados do NEM

É possível determinar também, a partir do NEM, a densidade de potência média do nodo  $\bar{p}^n$  que é dada pela equação:

$$\bar{p}^n = \sum_{g=1}^2 \overline{\omega \Sigma_{fg}^n} \bar{\phi}_g^n \quad (2.3)$$

As grandezas apresentadas neste capítulo são importantes, pois elas serão usadas na discretização da equação da difusão de nêutrons, no EC homogeneizado, representado por um nodo. Esta discretização é apresentada no capítulo a seguir.

# Capítulo 3

## Discretização da Equação da Difusão de Nêutrons

### 3.1 Introdução

Nesse capítulo é mostrada a discretização espacial da equação da difusão de nêutrons bidimensional e 2 grupos de energia, por diferenças finitas, com o esquema centrado na malha. A figura 3.1 mostra a malha, que possui a mesma dimensão de uma célula (pino) de combustível, na qual o nodo ( $n$ ) que representa um EC homogeneizado, foi dividido. A equação matricial, oriunda desta discretização, é usada no cálculo da distribuição do fluxo de nêutrons no EC homogêneo, que por sua vez, é utilizada para obter a distribuição homogênea de densidade de potência.

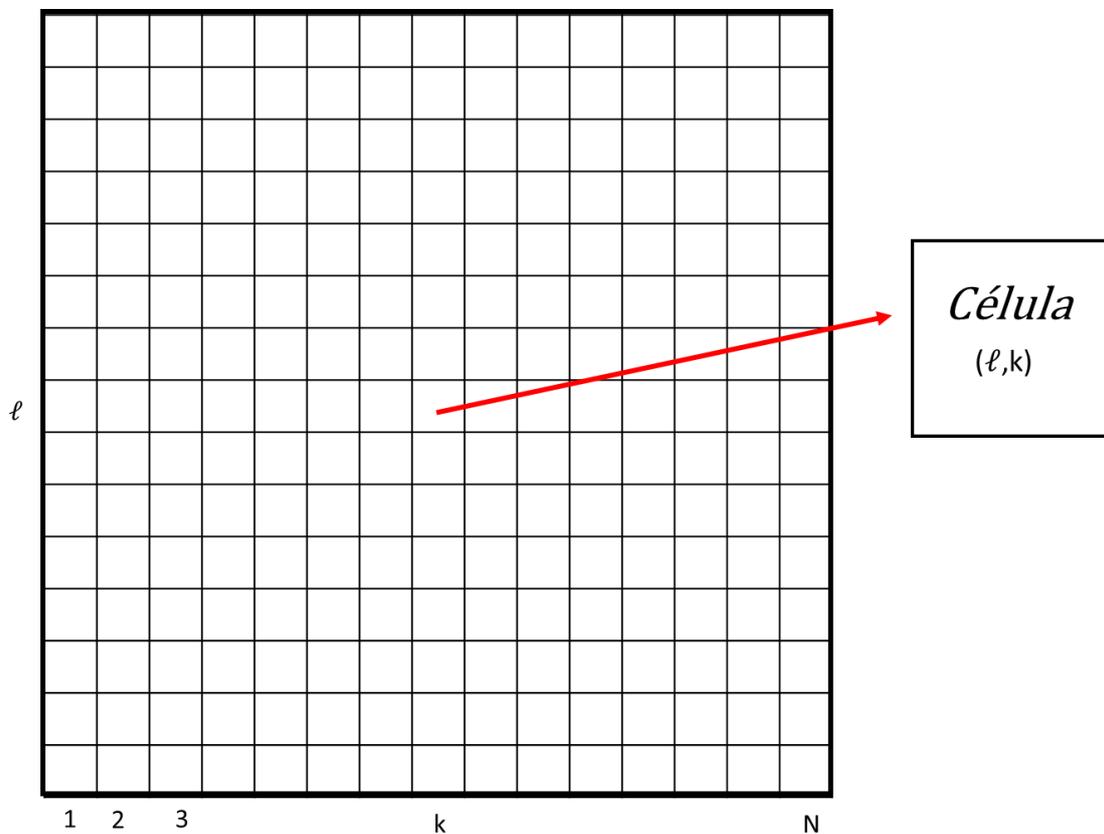


Figura 3.1 EC (nodo  $n$ ) dividido em malhas de dimensão de uma célula de combustível

### 3.2 Distribuição Homogênea de Fluxo de Nêutrons

A discretização espacial, por diferenças finitas, com esquema centrado na malha, de que trata esta seção, parte da equação da continuidade de nêutrons e da Lei de Flick, que são mostradas a seguir, respectivamente:

$$\sum_{u=x,y} \frac{\partial}{\partial u} J_{gu}(x,y) + \Sigma_{Rg}(x,y)\phi_g(x,y) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g \sum_{g'=1}^2 \nu \Sigma_{fg'}(x,y)\phi_{g'}(x,y) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(x,y)\phi_{g'}(x,y) \quad (3.1)$$

e

$$J_{gu}(x,y) = -D(x,y) \frac{\partial}{\partial u} \phi_g(x,y) \quad ; \quad \text{para } u = x,y \text{ e } g = 1,2. \quad (3.2)$$

Aplicando o operador de média,

$$\frac{1}{a_x^k a_y^\ell} \int_{x_e^k}^{x_d^k} \int_{y_e^\ell}^{y_d^\ell} (.) \, dx \, dy, \quad (3.3)$$

à equação (3.1) e lembrando que os parâmetros nucleares são uniformes no nodo (que tem as dimensões do EC) obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{1}{a_x^k} (\bar{J}_{1xd}^{\ell,k,n} - \bar{J}_{1xe}^{\ell,k,n}) + \frac{1}{a_y^\ell} (\bar{J}_{1yd}^{\ell,k,n} - \bar{J}_{1ye}^{\ell,k,n}) + \bar{\Sigma}_{R1}^n \bar{\phi}_1^{\ell,k,n} = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \sum_{g=1}^2 \bar{\nu} \Sigma_{fg}^n \bar{\phi}_g^{\ell,k,n} \quad (3.4)$$

e

$$\frac{1}{a_x^k} (\bar{J}_{2xd}^{\ell,k,n} - \bar{J}_{2xe}^{\ell,k,n}) + \frac{1}{a_y^\ell} (\bar{J}_{2yd}^{\ell,k,n} - \bar{J}_{2ye}^{\ell,k,n}) + \bar{\Sigma}_{R2}^n \bar{\phi}_2^{\ell,k,n} = \bar{\Sigma}_{21}^n \bar{\phi}_1^{\ell,k,n} \quad (3.5)$$

onde foi levado em conta que não existe *up-scattering* ( $\Sigma_s^{2 \rightarrow 1} = 0$ ),  $\Sigma_{21} \equiv \Sigma_s^{1 \rightarrow 2}$  e o espectro de fissão é um para o grupo 1 ( $\chi_1 = 1$ ) e zero para o grupo 2 ( $\chi_2 = 0$ ). Além disso,  $\bar{J}_{gus}^{\ell,k,n}$  é a corrente líquida média, para o grupo  $g$  na direção  $u$  (que pode ser  $x$  ou  $y$ ), na face  $s$  (que pode ser esquerda (e) ou direita (d)), assim definida:

$$\bar{J}_{gus}^{\ell,k,n} \equiv \frac{1}{a_v^m} \int_{v_e^m}^{v_d^m} J_{gu}(u_s^j, v) dv \quad ; \quad s=e,d, \quad (3.6)$$

$$\text{para } u = \begin{cases} x, & \text{se } v = y; \quad \text{com } j = k \quad \text{e } m = \ell \\ y, & \text{se } v = x; \quad \text{com } j = \ell \quad \text{e } m = k \end{cases} .$$

Já  $\bar{\phi}_g^{\ell,k,n}$  representa o fluxo médio na célula  $(\ell, k)$ , que é assim definido:

$$\bar{\phi}_g^{\ell,k,n} \equiv \frac{1}{a_{cel}^2} \int_{y_e^\ell}^{y_d^\ell} \int_{x_e^k}^{x_d^k} \phi_g(x, y) dx dy. \quad (3.7)$$

Na figura 3.2 se pode ver estas grandezas médias, para a célula  $(\ell, k)$ , onde:

$$x_d^k - x_e^k = y_d^\ell - y_e^\ell = a_{cel}.$$

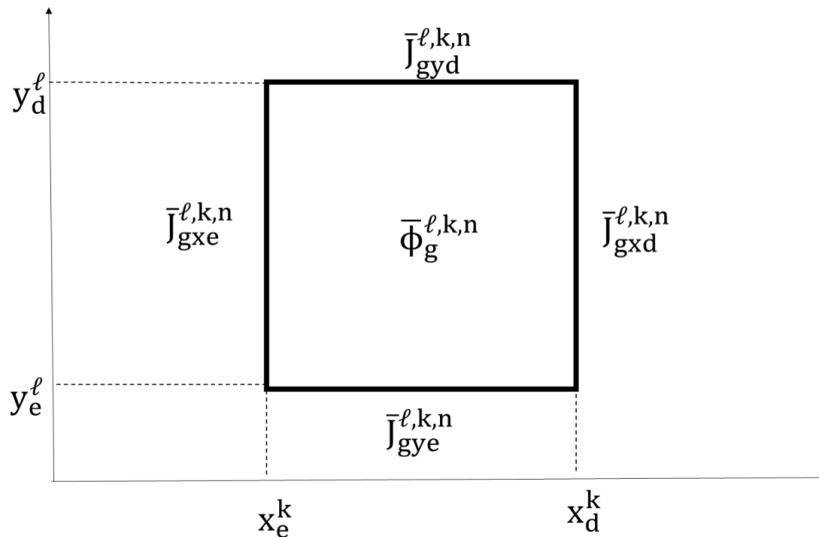


Figura 3.2 Célula com as correntes médias nas faces e fluxo médio na célula

Integrando a equação (3.2) (lei de Flick) na seção transversal a uma direção  $u$  obtém-se:

$$\bar{J}_{gus}^{\ell,k,n} = -\bar{D}_g^n \frac{d}{du} \left( \frac{1}{a_v^m} \int_{v_e^m}^{v_d^m} \phi_g(u, v) dv \right) \Big|_{u=u_s^j} ; s=e,d . \quad (3.8)$$

Mas, o fluxo médio de nêutrons, para o grupo  $g$  de energia, na seção transversal a direção  $u$  e face  $s$  ( $\bar{\Psi}_{gus}^{\ell,k,n}$ ), é assim definido:

$$\bar{\Psi}_{gus}^{\ell,k,n} \equiv \frac{1}{a_v^m} \int_{v_e^m}^{v_d^m} \phi_g(u_s^j, v) dv ; s=e,d, \quad (3.9)$$

Substituindo a equação (3.9) na equação (3.8) é possível reescrever  $\bar{J}_{gus}^{\ell,k,n}$  da seguinte forma:

$$\bar{J}_{gus}^{\ell,k,n} = -\bar{D}_g^n \frac{d}{du} \bar{\Psi}_{gus}^{\ell,k,n} \Big|_{u=u_s^j} ; s=e,d , \quad (3.10)$$

$$\text{para } u = \begin{cases} x; & \text{com } j=k, \\ y; & \text{com } j=\ell, \end{cases} .$$

A figura 3.3 mostra o fluxo médio para a direção  $u$  e face  $s$  ( $\bar{\Psi}_{gus}^{\ell,k,n}$ ), do grupo  $g$ , em cada uma das faces de uma célula  $(\ell, k)$  no nodo  $n$ .

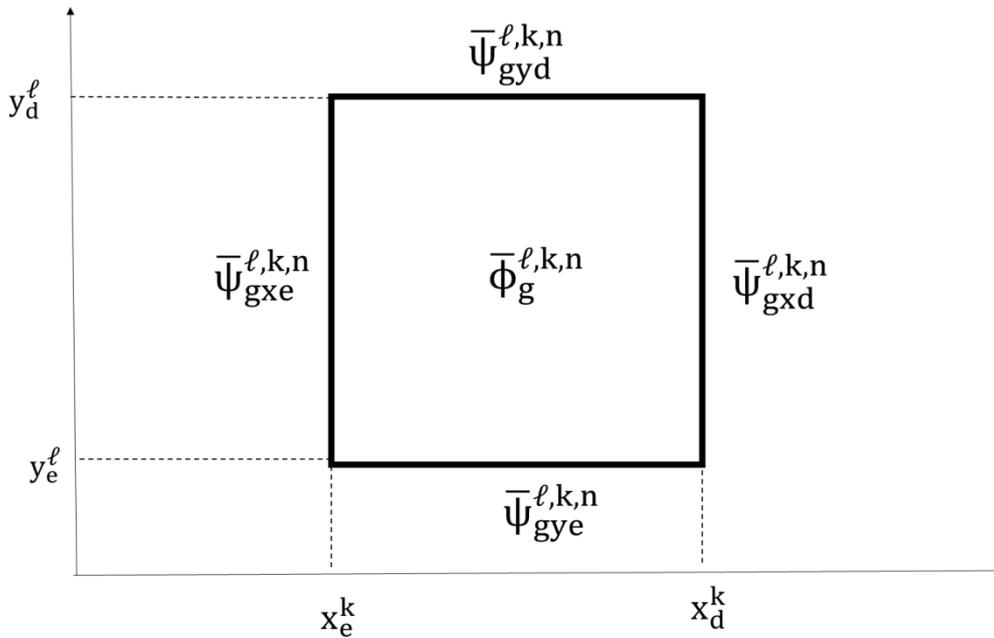


Figura 3.3 Célula com os fluxos médios nas faces

Entretanto as células podem possuir faces voltadas para o contorno ou voltadas para células vizinhas, como pode ser visto na figura 3.4. Sendo assim, as correntes podem ser reescritas, utilizando aproximação por diferenças finitas, dependendo para onde está voltada a face da célula.

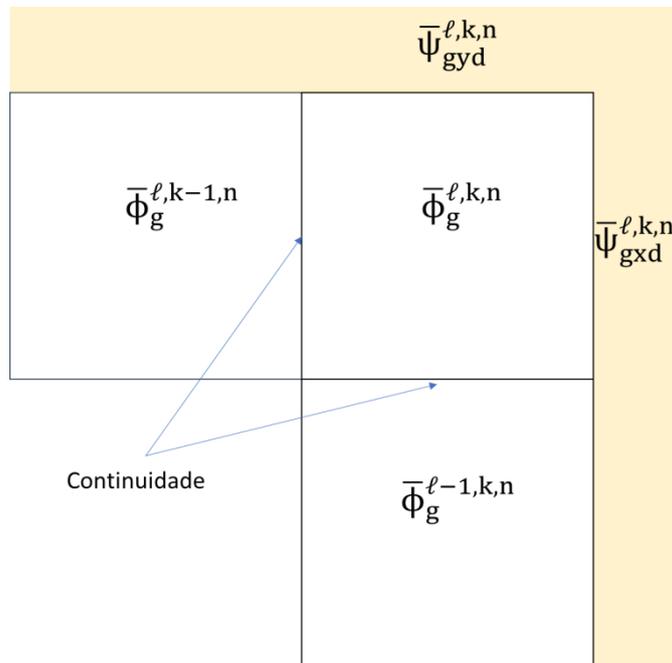


Figura 3.4 Regiões de continuidade e face voltada para contorno

Fonte: (TEIXEIRA, 2017)

Para faces voltadas para o contorno (parte colorida na figura 3.4) as seguintes equações são utilizadas:

$$\bar{J}_{\text{gud}}^{\ell,k,n} \cong -\frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}}(\bar{\Psi}_{\text{gud}}^{\ell,k,n} - \bar{\Phi}_g^{\ell,k,n}) \quad (3.11)$$

e

$$\bar{J}_{\text{gue}}^{\ell,k,n} \cong -\frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}}(\bar{\Phi}_g^{\ell,k,n} - \bar{\Psi}_{\text{gue}}^{\ell,k,n}) . \quad (3.12)$$

Por outro lado, para faces na interface com uma célula vizinha, as seguintes equações, que vêm das condições de continuidade, são utilizadas:

$$\bar{J}_{\text{gxe}}^{\ell,k,n} \cong -\frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}}(\bar{\Phi}_g^{\ell,k,n} - \bar{\Phi}_g^{\ell,k-1,n}) ; \ell = 1, \dots, N \text{ e } k = 2, \dots, N, \quad (3.13)$$

$$\bar{J}_{\text{gxd}}^{\ell,k,n} \cong -\frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}}(\bar{\Phi}_g^{\ell,k+1,n} - \bar{\Phi}_g^{\ell,k,n}) ; \ell = 1, \dots, N \text{ e } k = 1, \dots, N-1, \quad (3.14)$$

$$\bar{J}_{\text{gye}}^{\ell,k,n} \cong -\frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}}(\bar{\Phi}_g^{\ell,k,n} - \bar{\Phi}_g^{\ell-1,k,n}) ; \ell = 2, \dots, N \text{ e } k = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

e

$$\bar{J}_{\text{gyd}}^{\ell,k,n} \cong -\frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}}(\bar{\Phi}_g^{\ell+1,k,n} - \bar{\Phi}_g^{\ell,k,n}) ; \ell = 1, \dots, N-1 \text{ e } k = 1, \dots, N, \quad (3.16)$$

Estas últimas quatro equações são responsáveis por relacionar uma célula  $(\ell, k)$  com suas células vizinhas, como pode ser visto na figura 3.5.

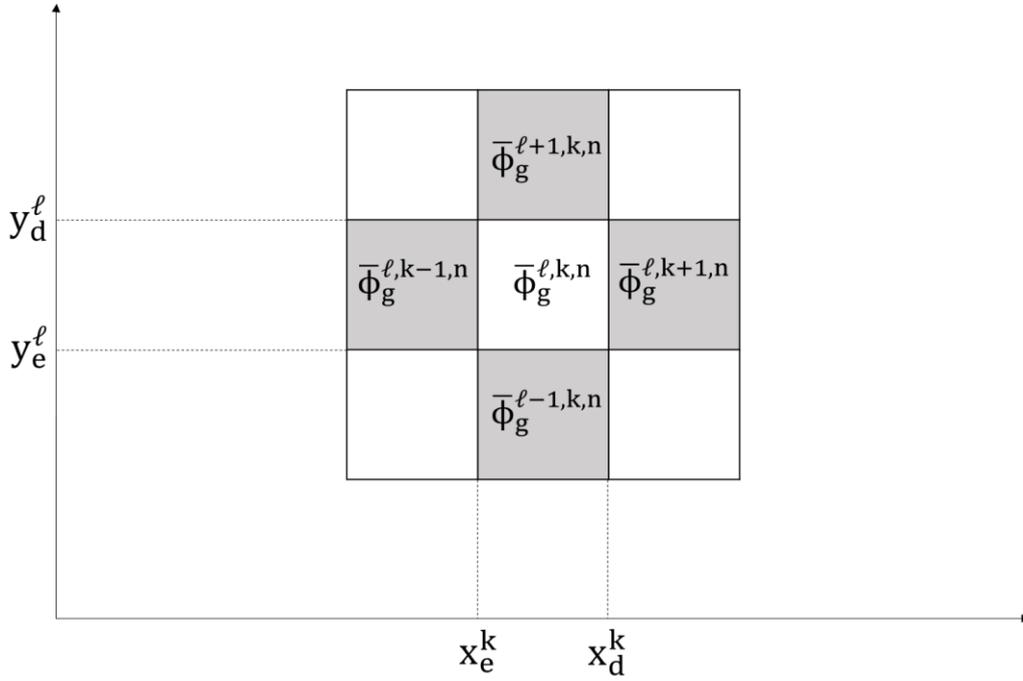


Figura 3.5 Relação entre os fluxos de uma célula  $(\ell, k)$  com suas células vizinhas

As equações para as correntes descritas acima são substituídas nas equações (3.4) e (3.5), para todas as células contidas no nodo e, dessa forma, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & A_{11}^{\ell-1,k,n} \bar{\Phi}_1^{\ell-1,k,n} + A_{11}^{\ell,k-1,n} \bar{\Phi}_1^{\ell,k-1,n} + A_{11}^{\ell,k,n} \bar{\Phi}_1^{\ell,k,n} + A_{11}^{\ell,k+1,n} \bar{\Phi}_1^{\ell,k+1,n} + A_{11}^{\ell+1,k,n} \bar{\Phi}_1^{\ell+1,k,n} = \\
 & = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \sum_{g=1}^2 F_{1g}^{\ell,k,n} \bar{\Phi}_g^{\ell,k,n} + \alpha_{1ye}^{\ell,k,n} \bar{\Psi}_{1ye}^{\ell,k,n} + \alpha_{1xe}^{\ell,k,n} \bar{\Psi}_{1xe}^{\ell,k,n} + \alpha_{1xd}^{\ell,k,n} \bar{\Psi}_{1xd}^{\ell,k,n} + \alpha_{1yd}^{\ell,k,n} \bar{\Psi}_{1yd}^{\ell,k,n} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & A_{22}^{\ell-1,k,n} \bar{\Phi}_2^{\ell-1,k,n} + A_{22}^{\ell,k-1,n} \bar{\Phi}_2^{\ell,k-1,n} + A_{22}^{\ell,k,n} \bar{\Phi}_2^{\ell,k,n} + A_{22}^{\ell,k+1,n} \bar{\Phi}_2^{\ell,k+1,n} + A_{22}^{\ell+1,k,n} \bar{\Phi}_2^{\ell+1,k,n} = \\
 & = A_{21}^{\ell,k,n} \bar{\Phi}_1^{\ell,k,n} + \alpha_{2ye}^{\ell,k,n} \bar{\Psi}_{2ye}^{\ell,k,n} + \alpha_{2xe}^{\ell,k,n} \bar{\Psi}_{2xe}^{\ell,k,n} + \alpha_{2xd}^{\ell,k,n} \bar{\Psi}_{2xd}^{\ell,k,n} + \alpha_{2yd}^{\ell,k,n} \bar{\Psi}_{2yd}^{\ell,k,n} , \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

onde  $\alpha_{\text{gus}}^{\ell,k,n}$  é dado pela equação abaixo se a face estiver voltada para o contorno e igual a zero se a face estiver voltada para uma célula vizinha.

$$\alpha_{\text{gus}}^{\ell,k,n} \equiv \frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}} \quad ; \quad \forall (\ell, k) , \quad u = x, y \quad \text{e} \quad s = e, d. \quad (3.19)$$

Os termos  $A_{gg}^{\ell-1,k,n}$ ,  $A_{gg}^{\ell,k-1,n}$ ,  $A_{gg}^{\ell,k+1,n}$  e  $A_{gg}^{\ell+1,k,n}$ , quando existem, são todos iguais a  $2\bar{D}_g^n/a_{cel}$ , e a existência deles está ligada a existência de células vizinhas. Os termos  $A_{21}^{\ell,k,n}$  são todos iguais a  $-\bar{\Sigma}_{21}^n$ . Os termos  $F_{11}^{\ell,k,n}$  e  $F_{12}^{\ell,k,n}$  são todos iguais a  $\bar{v}\bar{\Sigma}_1^n$  e  $\bar{v}\bar{\Sigma}_2^n$ , respectivamente. Já os termos  $A_{gg}^{\ell,k,n}$  são assim definidos:

$$A_{gg}^{\ell,k,n} \equiv \bar{\Sigma}_{Rg}^n + \frac{4\bar{D}_g^n}{a_{cel}^2} + \frac{1}{2}(\alpha_{gye}^{\ell,k,n} + \alpha_{gxe}^{\ell,k,n} + \alpha_{gxd}^{\ell,k,n} + \alpha_{gyd}^{\ell,k,n}). \quad (3.20)$$

As equações (3.17) e (3.18), contabilizando todas as  $N^2$  células, formam um sistema de equações lineares e algébricas, que pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$(A^n - \frac{1}{k_{eff}}F^n)\underline{\phi}^n = \sum_{g=1}^2 (M_{gye}^n \underline{\psi}_{gye}^n + M_{gxe}^n \underline{\psi}_{gxe}^n + M_{gxd}^n \underline{\psi}_{gxd}^n + M_{gyd}^n \underline{\psi}_{gyd}^n), \quad (3.21)$$

onde  $A^n$  e  $F^n$  são matrizes de ordem  $2N^2$ , assim definidas:

$$A^n \equiv \begin{bmatrix} A_{11}^n & 0 \\ A_{21}^n & A_{22}^n \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

e

$$F^n \equiv \begin{bmatrix} F_{11}^n & F_{12}^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Enquanto que  $\underline{\phi}^n$  é dado por:

$$\underline{\phi}^n \equiv [\bar{\phi}_1^{1,1,n} \dots \bar{\phi}_1^{\ell,k,n} \dots \bar{\phi}_1^{N,N,n} \quad \bar{\phi}_2^{1,1,n} \dots \bar{\phi}_2^{\ell,k,n} \dots \bar{\phi}_2^{N,N,n}]^T \quad (3.24)$$

e

$$M_{gye}^n \underline{\psi}_{gye}^n \equiv \frac{2\bar{D}_g^n}{a_{cel}^2} [\bar{\psi}_{gye}^{1,1,n} \dots \bar{\psi}_{gye}^{1,k,n} \dots \bar{\psi}_{gye}^{1,N,n} \quad 0 \dots 0]^T, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{M}_{\underline{gxe}}^n \underline{\Psi}_{\underline{gxe}}^n \equiv \frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}^2} \left[ \bar{\psi}_{\underline{gxe}}^{1,1,n} \ 0 \dots 0 \ \bar{\psi}_{\underline{gxe}}^{2,1,n} \ 0 \dots 0 \ \bar{\psi}_{\underline{gxe}}^{\ell,1,n} \ 0 \dots 0 \ \bar{\psi}_{\underline{gxe}}^{N,1,n} \ 0 \dots 0 \right]^T, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M}_{\underline{gxd}}^n \underline{\Psi}_{\underline{gxd}}^n \equiv \frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}^2} \left[ 0 \dots 0 \ \bar{\psi}_{\underline{gxd}}^{1,N,n} \ 0 \dots 0 \ \bar{\psi}_{\underline{gxd}}^{2,N,n} \ 0 \dots 0 \ \bar{\psi}_{\underline{gxd}}^{\ell,N,n} \ 0 \dots 0 \ \bar{\psi}_{\underline{gxd}}^{N,N,n} \right]^T \quad (3.27)$$

e

$$\mathbf{M}_{\underline{gyd}}^n \underline{\Psi}_{\underline{gyd}}^n \equiv \frac{2\bar{D}_g^n}{a_{\text{cel}}^2} \left[ 0 \dots 0 \ \bar{\psi}_{\underline{gyd}}^{N,1,n} \ \dots \ \bar{\psi}_{\underline{gyd}}^{N,k,n} \ \dots \ \bar{\psi}_{\underline{gyd}}^{N,N,n} \right]^T. \quad (3.28)$$

Agora utilizando a inversa da matriz  $\mathbf{A}^n - \frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{F}^n$ , com a seguinte definição:

$$\mathbf{B}^n \equiv \left( \mathbf{A}^n - \frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{F}^n \right)^{-1}, \quad (3.29)$$

obtém-se

$$\underline{\phi}^n = \sum_{g=1}^2 \mathbf{B}^n \left( \mathbf{M}_{\underline{gye}}^n \underline{\Psi}_{\underline{gye}}^n + \mathbf{M}_{\underline{gxe}}^n \underline{\Psi}_{\underline{gxe}}^n + \mathbf{M}_{\underline{gxd}}^n \underline{\Psi}_{\underline{gxd}}^n + \mathbf{M}_{\underline{gyd}}^n \underline{\Psi}_{\underline{gyd}}^n \right), \quad (3.30)$$

que representa a distribuição de fluxo no EC homogeneizado ( $\underline{\phi}^{\text{hom},n}$ ), ou seja,

$\underline{\phi}^{\text{hom},n} \equiv \underline{\phi}^n$  dado pela equação (3.30).

Mas, para obter  $\underline{\phi}^{\text{hom},n}$ , utilizando-se a equação (3.30), é necessário o conhecimento dos vetores  $\bar{\psi}_{\underline{gus}}^n$ , cuja obtenção será feita usando o Método da Máxima Entropia (MME) e descrita no próximo capítulo.

# Capítulo 4

## Método da Máxima Entropia

### 4.1 Introdução

No capítulo anterior foi determinada a equação com a qual será obtida a distribuição homogênea de fluxo ( $\phi^{\text{hom},n}$ ), equação (3.30). Para calcular a distribuição homogênea de fluxo é necessário conhecer a distribuição de fluxos nas faces do EC, representado pelo nodo  $n$  (os  $\bar{\Psi}_{\text{gus}}^{\ell,k,n}$ ; para  $u = x, y$  e  $s = e, d$ ), o que será feito utilizando-se o Princípio da Máxima Entropia (Jung e Cho, 1991).

O Método da Máxima Entropia foi usado para determinar a distribuição de probabilidades que melhor representa a distribuição de fluxos nas faces do EC, como sendo aquela que maximiza a entropia, dada por:

$$S = - \sum_{i=1}^I P_i \ln(P_i) \quad (4.1)$$

onde  $I$  representa o número total das informações e  $P_i$  representa a probabilidade da informação  $i$ .

### 4.2 Princípio da Máxima Entropia

A equação (4.1) funciona bem para ECs que se encontram próximos ao centro do núcleo. Porém, para reatores mais realistas, onde os ECs mais afastados são afetados pelos efeitos do contorno, essa equação não gera bons resultados (JUNG e CHO, 1990). Sendo assim, a equação (4.1), para um nodo  $n$  qualquer, é alterada para incorporar esses efeitos e reescrita da seguinte forma:

$$S^n = \sum_{g=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} P_{g,j}^n \ln\left(\frac{P_{g,j}^n}{Q_{g,j}^n}\right), \quad (4.2)$$

onde, para cada grupo  $g$ , os  $P_{g,j}^n$  representam distribuições de probabilidades que maximizam  $S^n$  enquanto que os  $Q_{g,j}^n$  representam distribuições de probabilidades conhecidas a priori. Como estas distribuições estão relacionadas com a distribuição de fluxo nas faces do EC, os  $\bar{\Psi}_{gus}^{\ell,k,n}$ ,  $g$  é o grupo de energia e  $j$  é o índice que associa  $P_{g,j}^n$  com estes  $\bar{\Psi}_{gus}^{\ell,k}$ , da seguinte forma:

$$P_{g,j}^n \equiv \frac{\bar{\Psi}_{gye}^{1,j,n}}{N\bar{\Psi}_{gye}^n} \quad ; \quad \text{para } j = 1, \dots, N \quad , \quad (4.3)$$

$$P_{g,j}^n \equiv \frac{\bar{\Psi}_{gxe}^{j,1,n}}{N\bar{\Psi}_{gxe}^n} \quad ; \quad \text{para } j = N+1, \dots, 2N \quad , \quad (4.4)$$

$$P_{g,j}^n \equiv \frac{\bar{\Psi}_{gxd}^{j,N,n}}{N\bar{\Psi}_{gxd}^n} \quad ; \quad \text{para } j = 2N+1, \dots, 3N \quad (4.5)$$

e

$$P_{g,j}^n \equiv \frac{\bar{\Psi}_{gyd}^{N,j,n}}{N\bar{\Psi}_{gyd}^n} \quad ; \quad \text{para } j = 3N+1, \dots, 4N \quad , \quad (4.6)$$

onde  $\bar{\Psi}_{gus}^n$ ; para  $u = x, y$  e  $s = e, d$ , são os fluxos médios nas faces do EC, representado pelo nodo  $n$ , obtidos do cálculo nodal global de malha grossa, usando o NEM. Os  $Q_{g,j}^n$  são da mesma forma que os  $P_{g,j}^n$  das equações (4.3) a (4.6), mas com os numeradores dados pela distribuição dos fluxos nas faces do EC, obtida de uma solução analítica da equação da difusão de nêutrons (TEIXEIRA, 2017).

Como os  $P_{g,j}^n$  representam distribuições de probabilidades, para cada  $g$ , se faz necessário garantir que a soma em  $j$ , para cada face do EC, seja igual a 1. Isso fica garantido, uma vez que:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\Psi}_{g'ye}^{1,j,n} = \bar{\Psi}_{g'ye}^n, \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=N+1}^{2N} \bar{\Psi}_{g'xe}^{j,1,n} = \bar{\Psi}_{g'xe}^n, \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=2N+1}^{3N} \bar{\Psi}_{g'xd}^{j,N,n} = \bar{\Psi}_{g'xd}^n \quad (4.9)$$

e

$$\frac{1}{N} \sum_{j=3N+1}^{4N} \bar{\Psi}_{g'yd}^{N,j,n} = \bar{\Psi}_{g'yd}^n. \quad (4.10)$$

Então, substituindo os  $P_{g,j}^n$ , como definidos nas equações (4.3) a (4.6), na equação (3.30) obtém-se:

$$\phi_{g,hom}^{\ell,k,n} = \sum_{g'=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} b_{gg'}^{i,j,n} P_{g,j}^n \quad ; \quad \text{para } i = (\ell - 1)N + k \quad \text{e } g = 1, 2, \quad (4.11)$$

onde, para  $j = 1, \dots, N$ , tem-se que

$$b_{gg'}^{i,j,n} \equiv (2N\bar{D}_g^n \bar{\Psi}_{g'ye}^n / a_{cel}^2) \mathcal{E}_{gg'}^{i,j,n}, \quad (4.12)$$

$$b_{gg'}^{i,N+j,n} \equiv (2N\bar{D}_g^n \bar{\Psi}_{g'xe}^n / a_{cel}^2) \mathcal{E}_{gg'}^{i,(j-1)N,n}, \quad (4.13)$$

$$b_{gg'}^{i,2N+j,n} \equiv (2N\bar{D}_g^n \bar{\Psi}_{g'xd}^n / a_{cel}^2) \mathcal{E}_{gg'}^{i,jN,n}, \quad (4.14)$$

e

$$b_{gg'}^{i,3N+j,n} \equiv (2N\bar{D}_g^n \bar{\Psi}_{g'yd}^n / a_{cel}^2) \mathcal{E}_{gg'}^{i,(N-1)N+j,n}, \quad (4.15)$$

com  $\mathcal{E}_{gg'}^{i,j,n}$  sendo os elementos da matriz  $B^n$ , dada pela equação (3.29).

Como pode ser visto da equação (4.11), que será usada na obtenção da distribuição homogênea de fluxo ( $\phi_{g,\text{hom}}^{\ell,k,n}$ ), para o EC homogeneizado (representado pelo nodo n), as distribuições de probabilidades  $P_{g,j}^n$  precisam ser calculadas. Na próxima seção é mostrado como o Método da Máxima Entropia é utilizado para esta finalidade.

### 4.3 Cálculo das Distribuições de Probabilidades

Como visto na seção anterior, a determinação das distribuições de probabilidades  $P_{g,j}^n$  é um problema de otimização, que consiste em maximizar a entropia (equação (4.2)). E este problema de otimização está sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{g'=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} c_{m,g'}^{j,n} P_{g',j}^n = 1 \quad , \quad (4.16)$$

onde os coeficientes  $c_{m,g'}^{j,n}$ , só são diferentes de zero, ou seja, são iguais a 1 nas seguintes situações:

$$\text{Se } m = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ e } j = 1, \dots, N \\ 2 \text{ e } j = N + 1, \dots, 2N \\ 3 \text{ e } j = 2N + 1, \dots, 3N \\ 4 \text{ e } j = 3N + 1, \dots, 4N \end{array} \right\} ; \text{ para } g' = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ e } j = 1, \dots, N \\ 6 \text{ e } j = N + 1, \dots, 2N \\ 7 \text{ e } j = 2N + 1, \dots, 3N \\ 8 \text{ e } j = 3N + 1, \dots, 4N \end{array} \right\} ; \text{ para } g' = 2$$

Observa-se que as restrições dadas pela equação (4.16) são impostas para garantir que cada  $P_{g,j}^n$ ; para  $j = 1, \dots, 4N$  e  $g = 1, 2$ , seja de fato uma probabilidade. As outras restrições são da seguinte forma:

$$\sum_{g'=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} c_{m,g'}^{j,n} P_{g',j}^n = N^2 \bar{\phi}_g^n \quad , \quad (4.17)$$

com

$$c_{m,g'}^{j,n} \equiv \sum_{\ell,k=1}^N b_{gg'}^{(\ell-1)N+k,j,n} \quad ; \quad \text{sendo } m = \begin{cases} 9 & ; \text{ para } g = 1 \\ 10 & ; \text{ para } g = 2 \end{cases} , \quad (4.18)$$

As restrições dadas pela equação (4.17) são para garantir o fluxo médio no EC, obtido do cálculo global nodal de malha grossa. E ainda têm-se as seguintes restrições:

$$\sum_{g'=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} c_{m,g'}^{j,n} P_{g',j}^n = N(\bar{\Psi}_{g_{ye}}^n - \frac{a_{cel}}{2D_g^n} \bar{J}_{g_{ye}}^n) , \quad (4.19)$$

com

$$c_{m,g'}^{j,n} \equiv \sum_{k=1}^N b_{gg'}^{k,j,n} \quad ; \quad \text{sendo } m = \begin{cases} 11 & ; \text{ para } g = 1 \\ 12 & ; \text{ para } g = 2 \end{cases} , \quad (4.20)$$

$$\sum_{g'=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} c_{m,g'}^{j,n} P_{g',j}^n = N(\bar{\Psi}_{g_{xe}}^n - \frac{a_{cel}}{2D_g^n} \bar{J}_{g_{xe}}^n) , \quad (4.21)$$

com

$$c_{m,g'}^{j,n} \equiv \sum_{\ell=1}^N b_{gg'}^{(\ell-1)N+1,j,n} \quad ; \quad \text{sendo } m = \begin{cases} 13 & ; \text{ para } g = 1 \\ 14 & ; \text{ para } g = 2 \end{cases} , \quad (4.22)$$

$$\sum_{g'=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} c_{m,g'}^{j,n} P_{g',j}^n = N(\bar{\Psi}_{g_{xd}}^n - \frac{a_{cel}}{2D_g^n} \bar{J}_{g_{xd}}^n) , \quad (4.23)$$

com

$$c_{m,g'}^{j,n} \equiv \sum_{\ell=1}^N b_{gg'}^{\ell N,j,n} \quad ; \quad \text{sendo } m = \begin{cases} 15 & ; \text{ para } g = 1 \\ 16 & ; \text{ para } g = 2 \end{cases} \quad (4.24)$$

e

$$\sum_{g'=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} c_{m,g'}^{j,n} P_{g',j}^n = N(\bar{\Psi}_{g_{yd}}^n - \frac{a_{cel}}{2D_g^n} \bar{J}_{g_{yd}}^n) , \quad (4.25)$$

com

$$c_{m,g'}^{j,n} \equiv \sum_{k=1}^N b_{gg'}^{(N-1)N+k,j,n} ; \text{ sendo } m = \begin{cases} 17 ; \text{ para } g = 1 \\ 18 ; \text{ para } g = 2 \end{cases} . \quad (4.26)$$

As restrições dadas pelas equações (4.19), (4.21), (4.23) e (4.25) garantem tanto os fluxos médios quanto as correntes líquidas médias nas faces do EC, também obtidos do cálculo global nodal de malha grossa.

Segundo o critério de Kuhn-Tucker (STRANG, 1986), a solução deste problema de otimização, qual seja, a maximização da entropia dada pela equação (4.2), sujeita às restrições acima apresentadas, gera distribuições de probabilidades da seguinte forma:

$$P_{g,j}^n \equiv Q_{g,j}^n \exp\left(-1 - \sum_{i=1}^{18} c_{i,g}^{j,n} \lambda_i^n\right) ; \text{ para } j = 1, \dots, 4N \text{ e } g = 1, 2 , \quad (4.27)$$

onde os dezoito  $\lambda_i^n$ , para cada nodo  $n$ , são multiplicadores de Lagrange. A substituição da equação (4.27) nas restrições acima apresentadas dá origem a um sistema de 18 equações não lineares, cada uma da seguinte forma:

$$G_m^n(\lambda_1^n, \dots, \lambda_{18}^n) = \sum_{g=1}^2 \sum_{j=1}^{4N} c_{m,g}^{j,n} Q_{g,j}^n \exp\left(-1 - \sum_{i=1}^{18} c_{i,g}^{j,n} \lambda_i^n\right) - h_m^n = 0 , \quad (4.28)$$

com os termos independentes  $h_m^n$ ; para  $m = 1, \dots, 18$ , são os lados direito de cada restrição, respectivamente.

O método de solução, adotado para resolver o sistema de equações formado pela equação (4.28), para determinação dos multiplicadores de Lagrange (os dezoito  $\lambda_i^n$ , de cada nodo  $n$ ) foi o Método de Newton-Raphson e é apresentado na próxima seção.

#### 4.4 Método de Newton-Raphson

Como dito ao final da seção 4.3, o Método de Newton-Raphson foi utilizado para resolver o sistema de equações não lineares, composto de 18 equações e 18 incógnitas,

que é obtido a partir da equação (4.27). Este sistema pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\underline{G}^n(\underline{\Lambda}^n) = \begin{bmatrix} G_1^n(\underline{\Lambda}^n) \\ G_2^n(\underline{\Lambda}^n) \\ G_3^n(\underline{\Lambda}^n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{18}^n(\underline{\Lambda}^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

onde:

$$\underline{\Lambda}^n \equiv [\lambda_1^n \ \lambda_2^n \ \lambda_3^n \ \dots \ \lambda_{18}^n]^T. \quad (4.30)$$

Mas, a utilização do Método de Newton-Raphson para resolver o sistema de equações dado pela equação (4.29), resulta em um processo iterativo de cálculo do conjunto de multiplicadores de Lagrange (dado pela equação (4.30)). Este processo iterativo parte da expansão em série de Taylor do vetor  $\underline{G}^n(\underline{\Lambda}^n)$ , em torno de um conjunto aproximado de multiplicadores de Lagrange que é escrito da seguinte forma:

$$\underline{\Lambda}^{n(\ell)} \equiv [\lambda_1^{n(\ell)} \ \lambda_2^{n(\ell)} \ \lambda_3^{n(\ell)} \ \dots \ \lambda_{18}^{n(\ell)}]^T, \quad (4.31)$$

onde o índice dentro do parênteses representa a  $\ell$ -ésima iteração. Sendo assim, desta expansão em série de Taylor resulta que

$$\underline{G}^n(\underline{\Lambda}^{n(\ell+1)}) \cong \underline{G}^n(\underline{\Lambda}^{n(\ell)}) + \mathbf{J}_\ell^n(\underline{\Lambda}^{n(\ell+1)} - \underline{\Lambda}^{n(\ell)}), \quad (4.32)$$

com  $\mathbf{J}_\ell^n$  sendo o *Jacobiano*, calculado para o conjunto de multiplicadores de Lagrange da  $\ell$ -ésima iteração e obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{J}_\ell^n = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{G}_1^n}{\partial \lambda_1^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} & \left. \frac{\partial \mathbf{G}_1^n}{\partial \lambda_2^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} & \cdots & \left. \frac{\partial \mathbf{G}_1^n}{\partial \lambda_{18}^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} \\ \left. \frac{\partial \mathbf{G}_2^n}{\partial \lambda_1^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} & \left. \frac{\partial \mathbf{G}_2^n}{\partial \lambda_2^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} & \cdots & \left. \frac{\partial \mathbf{G}_2^n}{\partial \lambda_{18}^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial \mathbf{G}_{18}^n}{\partial \lambda_1^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} & \left. \frac{\partial \mathbf{G}_{18}^n}{\partial \lambda_2^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} & \cdots & \left. \frac{\partial \mathbf{G}_{18}^n}{\partial \lambda_{18}^n} \right|_{\underline{\Lambda}^{n(\ell)}} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Sendo assim, da equação (4.32), obtém-se:

$$\underline{\Lambda}^{n(\ell+1)} = \underline{\Lambda}^{n(\ell)} - (\mathbf{J}_\ell^n)^{-1} (\underline{\mathbf{G}}^n(\underline{\Lambda}^{n(\ell+1)}) - \underline{\mathbf{G}}^n(\underline{\Lambda}^{n(\ell)})). \quad (4.34)$$

Então, uma vez determinados os multiplicadores de Lagrange, é possível calcular as distribuições de probabilidades nas faces dos ECs, através da equação (4.27) e com estas distribuições pode-se calcular a distribuição homogênea de fluxo, através da equação (4.11). No próximo capítulo é mostrado como esta distribuição homogênea de fluxo é usada para obtenção da distribuição de densidade de potência heterogênea pino a pino.

# Capítulo 5

## Distribuição de Densidade de Potência Heterogênea Pino a Pino

### 5.1 Introdução

Neste capítulo é mostrado como a densidade de potência heterogênea pino a pino ( $\bar{p}_{\text{het}}^{\ell,k,n}$ ), é obtida a partir da distribuição homogênea de fluxo ( $\phi_{g,\text{hom}}^{\ell,k,n}$ ), para o EC homogeneizado. O Método de Modulação e, também, normalizações são utilizados para obter tal densidade de potência heterogênea pino a pino.

### 5.2 Densidade de Potência Homogênea Pino a Pino

A distribuição de densidade de potência homogênea pino a pino ( $\bar{p}_{\text{hom}}^{\ell,k,n}$ ) é calculada a partir da distribuição homogênea de fluxo  $\phi_{g,\text{hom}}^{\ell,k,n}$ , calculado fazendo uso do Método da Máxima Entropia, da seguinte forma:

$$\bar{p}_{\text{hom}}^{\ell,k} = \sum_{g=1}^2 \overline{\omega \Sigma_{fg}^n} \phi_{g,\text{hom}}^{\ell,k,n}, \quad (5.1)$$

com  $\overline{\omega \Sigma_{fg}^n}$  sendo o produto da energia média liberada por fissão pela seção de choque macroscópica de fissão, para o nodo  $n$  e grupo  $g$  de energia. Esta distribuição de potência homogênea pino a pino é, então, multiplicada pela função forma de potência para obter a densidade de potência heterogênea pino a pino reconstruída ( $\bar{p}_{\text{Rec}}^{\ell,k,n}$ ), como será visto no próximo item deste capítulo.

### 5.3 Método de Modulação

Para o cálculo da densidade de potência heterogênea pino a pino reconstruída,  $\bar{p}_{\text{Rec}}^{\ell,k,n}$ , é utilizado o Método de Modulação. Neste método, a distribuição de densidade de potência homogênea pino a pino  $\bar{p}_{\text{hom}}^{\ell,k,n}$ , dada pela equação (5.1), é multiplicada pela

função forma de potência  $f_{\text{pot}}^{\ell,k,n}$ , obtida no processo de homogeneização de EC. Então, fazendo uso do Método de Modulação, tem-se:

$$\bar{p}_{\text{Rec}}^{\ell,k,n} = f_{\text{pot}}^{\ell,k,n} \bar{p}_{\text{hom}}^{\ell,k,n} . \quad (5.2)$$

Mas, tem que reproduzir a densidade de potência média nodal, que é dada pela equação (2.3). Então, isto obriga que  $\bar{p}_{\text{Rec}}^{\ell,k,n}$  seja normalizada de tal modo que a densidade de potência heterogênea pino a pino  $\bar{p}_{\text{het}}^{\ell,k,n}$  seja dada por:

$$\bar{p}_{\text{het}}^{\ell,k,n} = C_{\text{Norm}}^n \bar{p}_{\text{Rec}}^{\ell,k,n} , \quad (5.3)$$

com a constante de normalização ( $C_{\text{Norm}}^n$ ) dada por:

$$C_{\text{Norm}}^n = \frac{\bar{p}^n}{\frac{1}{N^2} \sum_{\ell,k=1}^N \bar{p}_{\text{het}}^{\ell,k,n}} , \quad (5.4)$$

sendo  $\bar{p}^n$  a densidade de potência média nodal, para o EC considerado.

No próximo capítulo são apresentados os resultados obtidos com a utilização do método de reconstrução desenvolvido nesta dissertação, para o caso do núcleo do reator EPRI-9, que também será apresentado no próximo capítulo.

#### 5.4 Procedimentos para a reconstrução

Os procedimentos feitos pelo método de reconstrução desenvolvido nessa dissertação, que utiliza o método de modulação (Pessoa, 2014), são descritos a seguir:

- 1) Efetuar cálculo de homogeneização para obter os parâmetros nucleares homogêneos, a função forma e os fatores de descontinuidade;
- 2) Cálculo nodal de malha grossa com o NEM2D para obter as grandezas médias;
- 3) Discretização espacial da equação de difusão, no EC homogeneizado, para obter o fluxo homogêneo de nêutrons;
- 4) Utilização do MME para obter a distribuição de probabilidade que representa os fluxos nas faces externas das células que estão no contorno do EC;
- 5) Cálculo dos Multiplicadores de Lagrange utilizando o Método de Newton-Raphson (BYRNE, 2015), de acordo com o MME;

- 6) Determinação do fluxo homogêneo de nêutrons utilizando a equação (4.11);
- 7) Obtenção da distribuição de potência homogênea através da equação (5.1);
- 8) Determinação da densidade de potência heterogênea pino a pino, usando o Método de Modulação.

# Capítulo 6

## Apresentação e Discussão de Resultados

### 6.1 Reator de Referência

O reator EPRI-9 (Electric Power Research Institute, vol.9) (KHALIL, 1983) é utilizado como referência neste trabalho, sendo um reator do tipo PWR, com geometria de um quarto de núcleo, condições de fluxo nulo no contorno e corrente nula nos eixos de simetria, o núcleo ativo é constituído de oito ECs com dois diferentes enriquecimentos (combustíveis C1 e C2), rodeados por um baffle de 2,8 cm de espessura e refletor de água, sem barras de controle inseridas.

A configuração do reator EPRI-9 é mostrada na figura 6.1, onde as áreas em amarelo são os Elementos Combustíveis (ECs) com células do combustível C2, as áreas em verde são os ECs com células do combustível C1, a região cinza representa o baffle e a região em azul representa o refletor. A linha vermelha é o eixo de simetria na diagonal, pois este reator tem simetria de 1/8 de núcleo.

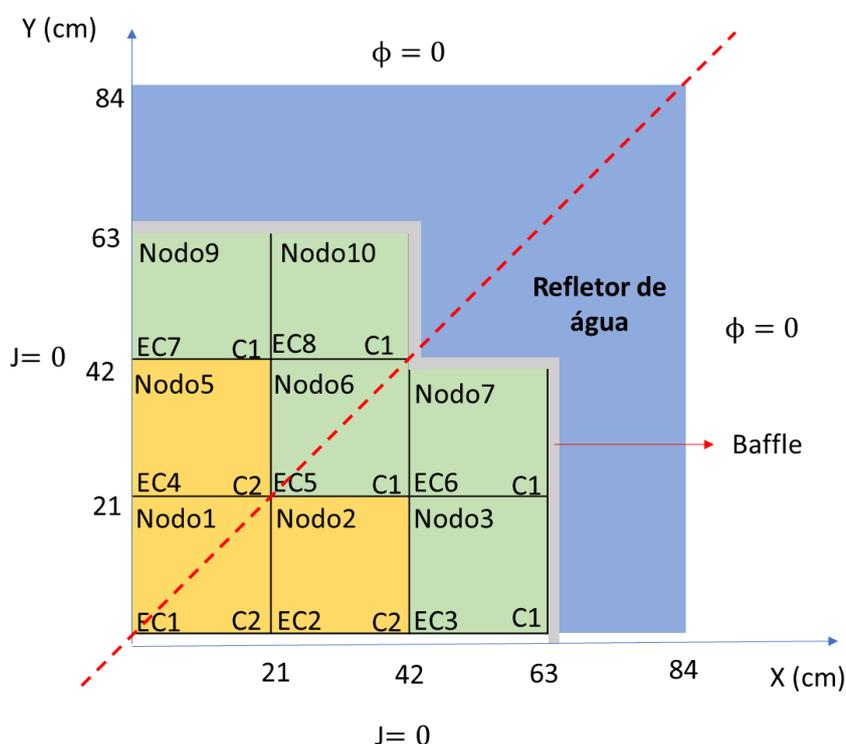


Figura 6.1 Configuração de um quarto de núcleo do reator EPRI

Os elementos combustíveis neste problema têm 15x15 células de combustíveis de 1,4 x 1,4 cm<sup>2</sup> cada uma. Na figura 6.2 estão representadas as células contidas em um EC heterogêneo, onde as de cor branca são células de combustíveis e na cor escura são células de buracos d'água, homogeneizadas.

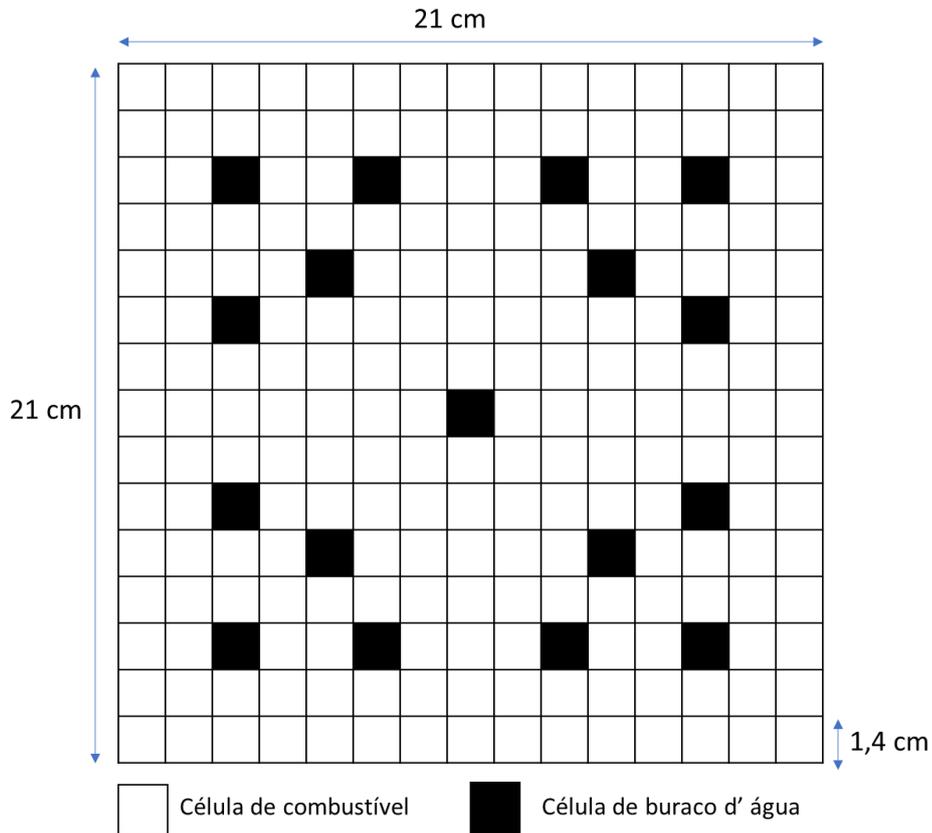


Figura 6.2 Geometria heterogênea do elemento combustível

Cálculos de homogeneização foram obtidos para o reator de referencia EPRI-9, tendo como ponto de partida a equação da difusão de nêutrons bidimensional, a dois grupos de energia, discretizada por diferenças finitas com malhas finas.

Os elementos combustíveis foram homogeneizados, obtendo-se parâmetros nucleares homogêneos, usando cálculo de um único EC (TEIXEIRA, 2017), para cada tipo de EC, no qual utiliza-se corrente líquida nula nas faces do elemento como condição de contorno. A geometria espectral utilizada para a homogeneização dos ECs é a mostrada na figura 6.2. A tabela 6.1 mostra os resultados obtidos no processo de homogeneização dos ECs enquanto que a tabela 6.2, mostra os fatores de descontinuidade obtidos neste processo.

Tabela 6.1 Parâmetros nucleares homogêneos dos ECs

Tipos	g	$\Sigma_{ag}$ (cm <sup>-1</sup> )	$\nu\Sigma_{fg}$ (cm <sup>-1</sup> )	$D_g$ (cm)	$\Sigma_{sg}$ (cm <sup>-1</sup> ) <sup>(*)</sup>
C1	1	1,2099E-02	6,0122E-03	1,5134E+00	2,1126E-02
	2	1,6854E-01	2,1884E-01	3,9503E-01	0,0
C2	1	9,3249E-03	4,6249E-03	1,5133E+00	2,1125E-02
	2	1,4141E-01	1,6453E-01	3,9515E-01	0,0

(\*)  $\Sigma_{s1} \equiv \Sigma_{21}$  e  $\Sigma_{s2} \equiv \Sigma_{12}$

Tabela 6.2 Fatores de descontinuidade nas faces dos ECs

Tipos	g	$f_{gue}; u = x, y$	$f_{gud}; u = x, y$
C1	1	1,00297	1,00297
	2	0,92900	0,92900
C2	1	1,00361	1,00361
	2	0,93850	0,93850

Para homogeneização das regiões de baffle/refletor são utilizados os cálculos de núcleo estendido (SMITH, 1986). A figura 6.3 mostra a geometria espectral para a homogeneização da região do baffle / refletor com baffle na lateral do EC. Já a figura 6.4 mostra a geometria espectral para a homogeneização da região baffle / refletor com baffle em forma de L.

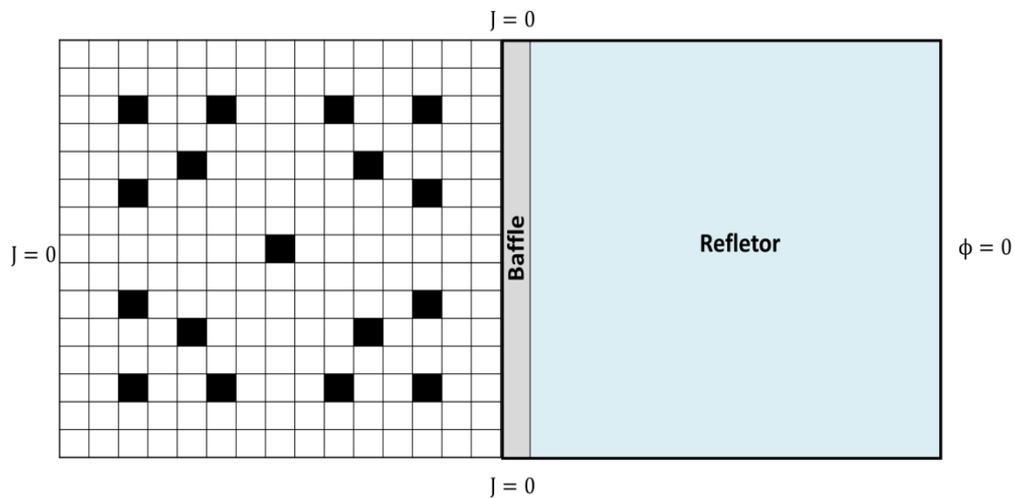


Figura 6.3 Geometria espectral para homogeneização da região baffle / refletor

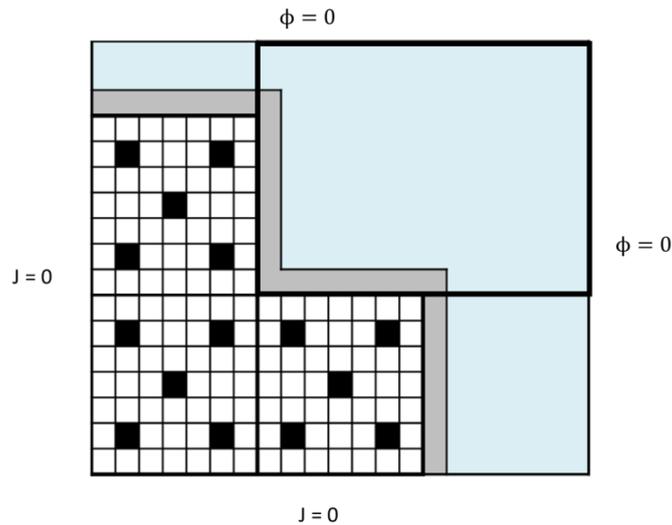


Figura 6.4 Geometria espectral para homogeneização da região baffle / refletor com baffle em forma de L

A tabela 6.3 mostra os resultados do processo de homogeneização das regiões de baffle / refletor, destacadas nas figuras 6.3 e 6.4, enquanto que a tabela 6.4 mostra os fatores de descontinuidade obtidos neste processo.

Tabela 6.3 Parâmetros nucleares homogêneos das regiões de baffle / refletor

Tipos	g	$\Sigma_{ag}$ (cm <sup>-1</sup> )	$D_g$ (cm)	$\Sigma_{sg}$ (cm <sup>-1</sup> ) <sup>(*)</sup>
baffle na lateral	1	1,8526E-03	1,3510E+00	2,1436E-02
	2	6,0460E-02	3,4830E-01	0,0
baffle em forma de L	1	1,9140E-03	1,3313E+00	2,0460E-02
	2	6,1110E-02	3,4818E-01	0,0

(\*)  $\Sigma_{s1} \equiv \Sigma_{21}$  e  $\Sigma_{s2} \equiv \Sigma_{12}$

Tabela 6.4 Fatores de descontinuidade para regiões de baffle / refletor

Tipos	Grupo	Face entre o EC e o baffle
baffle na lateral	1	1,16110
	2	0,28788
baffle em forma de L	1	1,19270
	3	0,30737

Os parâmetros nucleares homogêneos, mostrados nas tabelas 6.1 e 6.3, juntamente com os fatores de descontinuidade, mostrados nas tabelas 6.2 e 6.4, foram utilizados no cálculo global nodal de malha grossa do núcleo do reator EPRI-9.

Deve ser ressaltado que do processo de homogeneização de EC também foram obtidas as funções forma de potência, utilizadas na reconstrução da densidade de potência heterogênea pino a pino.

## **6.2 Resultados do Cálculo Nodal de Malha Grossa**

Os dados do processo de homogeneização, que foram mostrados na seção anterior, foram utilizados no programa NEM2D, obtendo-se os valores médios necessários para uso no MME. Esses valores são os fluxos médios nodais ( $\bar{\phi}_g^n$ ), os fluxos médios nas faces dos ECs ( $\bar{\psi}_{gus}^n$ ) e as correntes líquidas médias nas faces do EC ( $\bar{J}_{gus}^n$ ). A tabela 6.5 mostra estes valores médios obtidos pelo NEM2D, para o núcleo do reator EPRI-9. O valor do fator de multiplicação efetivo ( $k_{eff}$ ) também foi obtido do cálculo nodal, sendo 0,92764.

Tabela 6.5 Valores médios obtidos do NEM2D para o núcleo do reator EPRI-9

	g	ECs							
		1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{\phi}_g^n$	1	9,3346	7,9637	4,8141	7,9637	6,7715	3,5050	4,8141	3,5050
	2	1,3926	1,1763	0,6022	1,1763	0,8568	0,4312	0,6022	0,4312
$\bar{\Psi}_{g_{ye}}^n$	1	9,5554	8,1143	4,9874	8,8943	7,6991	4,4614	6,7981	5,3796
	2	1,4254	1,2152	0,6235	1,3279	1,0585	0,5594	0,9381	0,6701
$\bar{\Psi}_{g_{xe}}^n$	1	9,5554	8,8943	6,7981	8,1143	7,6991	5,3796	4,9874	4,4614
	2	1,4254	1,3279	0,9381	1,2152	1,0585	0,6701	0,6235	0,5594
$\bar{\Psi}_{g_{xd}}^n$	1	8,8943	6,7938	2,3961	7,6942	5,3796	1,6121	4,4614	2,1559
	2	1,3279	0,9286	0,2238	1,0477	0,6701	0,1512	0,5594	0,2104
$\bar{\Psi}_{g_{yd}}^n$	1	8,8943	7,6942	4,4614	6,7938	5,3796	2,1559	2,3961	1,6121
	2	1,3279	1,0477	0,5594	0,9286	0,6701	0,2104	0,2238	0,1512
$\bar{J}_{g_{ye}}^n$	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0970	0,0335	0,0856	0,1852	0,2535
	2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0031	0,0206	0,0022	0,0230	0,0068
$\bar{J}_{g_{xe}}^n$	1	0,0000	0,0970	0,1852	0,0000	0,0335	0,2535	0,0000	0,0856
	2	0,0000	0,0031	0,0230	0,0000	0,0206	0,0068	0,0000	0,0022
$\bar{J}_{g_{xd}}^n$	1	0,0970	0,1852	0,3782	0,0335	0,2535	0,2597	0,0856	0,2466
	2	0,0031	0,0230	0,0257	0,0206	0,0068	0,0183	0,0022	0,0198
$\bar{J}_{g_{yd}}^n$	1	0,0970	0,0335	0,0856	0,1852	0,2535	0,2466	0,3782	0,2597
	2	0,0031	0,0206	0,0022	0,0230	0,0068	0,0198	0,0257	0,0183

A relação entre o nodo n e a numeração dos ECs, mostrada na figura 6.1, é a seguinte: os ECs 1,2 e 3 correspondem aos nodos 1, 2 e 3; os ECs 4, 5 e 6 correspondem aos nodos 5, 6 e 7 e os ECs 7 e 8 correspondem aos nodos 9 e 10, usados nos cálculos globais nodais de malha grossa com o programa NEM2D.

### 6.3 Multiplicadores de Lagrange

O Método de Newton-Raphson apresentado na seção 4.4, para cálculo dos Multiplicadores de Lagrange, usados para a determinação das probabilidades nas faces dos ECs, forneceu os valores apresentados na tabela 6.6 para estes multiplicadores.

Tabela 6.6: Multiplicadores de Lagrange

$\lambda_i$	ECs							
i	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,0368	0,0131	-0,0286	0,1114	0,1292	0,0881	0,2838	0,3009
2	0,0338	0,1139	-0,1676	0,1996	0,2237	0,0943	0,4805	0,3287
3	0,0368	0,1114	0,2838	0,0131	0,1292	0,3009	-0,0286	0,0881
4	0,0338	0,1996	0,4805	0,1139	0,2237	0,3287	-0,1676	0,0943
5	-0,0397	-0,1361	-0,512	-0,0227	-0,1851	-0,6068	-0,1262	-0,4812
6	-0,0412	-0,2611	-1,0146	-0,1687	-0,3682	-0,9089	-0,2445	-0,7674
7	-0,0397	-0,0227	-0,1262	-0,1361	-0,1851	-0,4812	-0,512	-0,6068
8	-0,0412	-0,1687	-0,2445	-0,2611	-0,3682	-0,7674	-1,0146	-0,9089
9	0,0024	0,0028	0,0039	0,0028	0,0034	0,0046	0,0039	0,0046
10	-0,0164	-0,0187	-0,0301	-0,0187	-0,0264	-0,0347	-0,0301	-0,0347
11	-0,0073	-0,0079	-0,0126	-0,008	-0,0092	-0,0142	-0,0107	-0,0139
12	-0,048	-0,0645	-0,0981	-0,063	-0,0846	-0,1593	-0,1256	-0,1626
13	-0,0073	-0,008	-0,0107	-0,0079	-0,0092	-0,0139	-0,0126	-0,0142
14	-0,048	-0,063	-0,1256	-0,0645	-0,0846	-0,1626	-0,0981	-0,1593
15	-0,0072	-0,0087	-0,0202	-0,0088	-0,0107	-0,021	-0,0126	-0,0183
16	-0,0477	-0,0505	0,0726	-0,0503	-0,0586	0,0034	-0,0999	-0,0563
17	-0,0072	-0,0088	-0,0126	-0,0087	-0,0107	-0,0183	-0,0202	-0,021
18	-0,0477	-0,0503	-0,0999	-0,0505	-0,0586	-0,0563	0,0726	0,0034

#### 6.4 Distribuições de Probabilidades nas Faces dos ECs

As probabilidades nas faces dos ECs  $P_{g,j}^n$  foram obtidas pela substituição na equação 4.3 dos Multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i^n$ , mostrados na tabela 6.6, e usando como estimativas das probabilidades nas faces dos ECs as distribuições a priori  $Q_{g,j}^n$ , obtidas através da solução analítica da equação da difusão bidimensional para dois grupos de energia.

As figuras 6.5 a 6.14, nas páginas a seguir, mostram a distribuição de probabilidades nas faces dos ECs, obtidas pelo MME bem como a distribuição a priori usada no cálculo.

Em cada figura, os gráficos na parte superior (a) mostram a distribuição de probabilidades nas faces dos ECs e os gráficos (b) na parte inferior mostram a distribuição a priori.

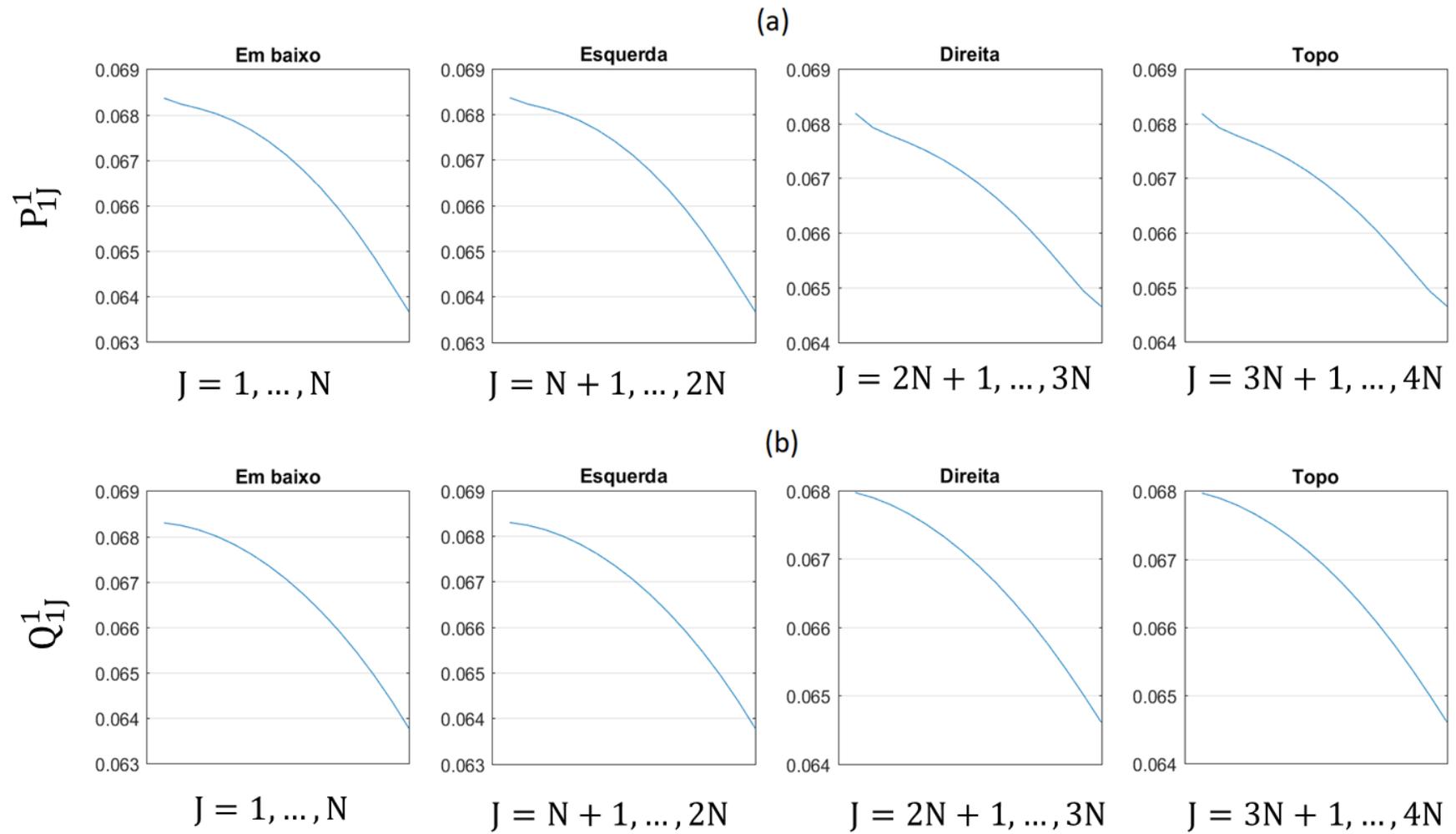


Figura 6.5: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 1, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

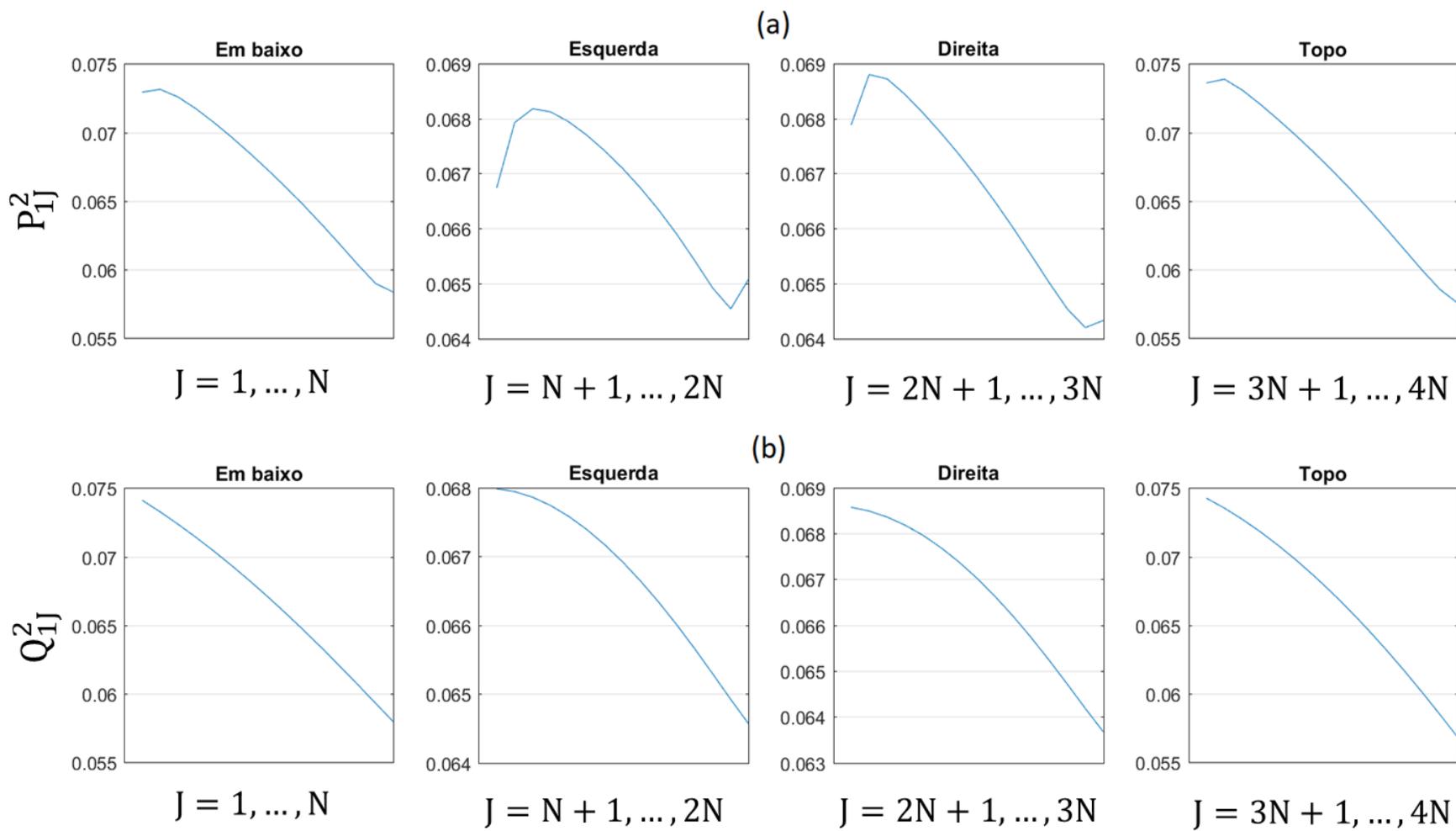


Figura 6.6: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 2, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

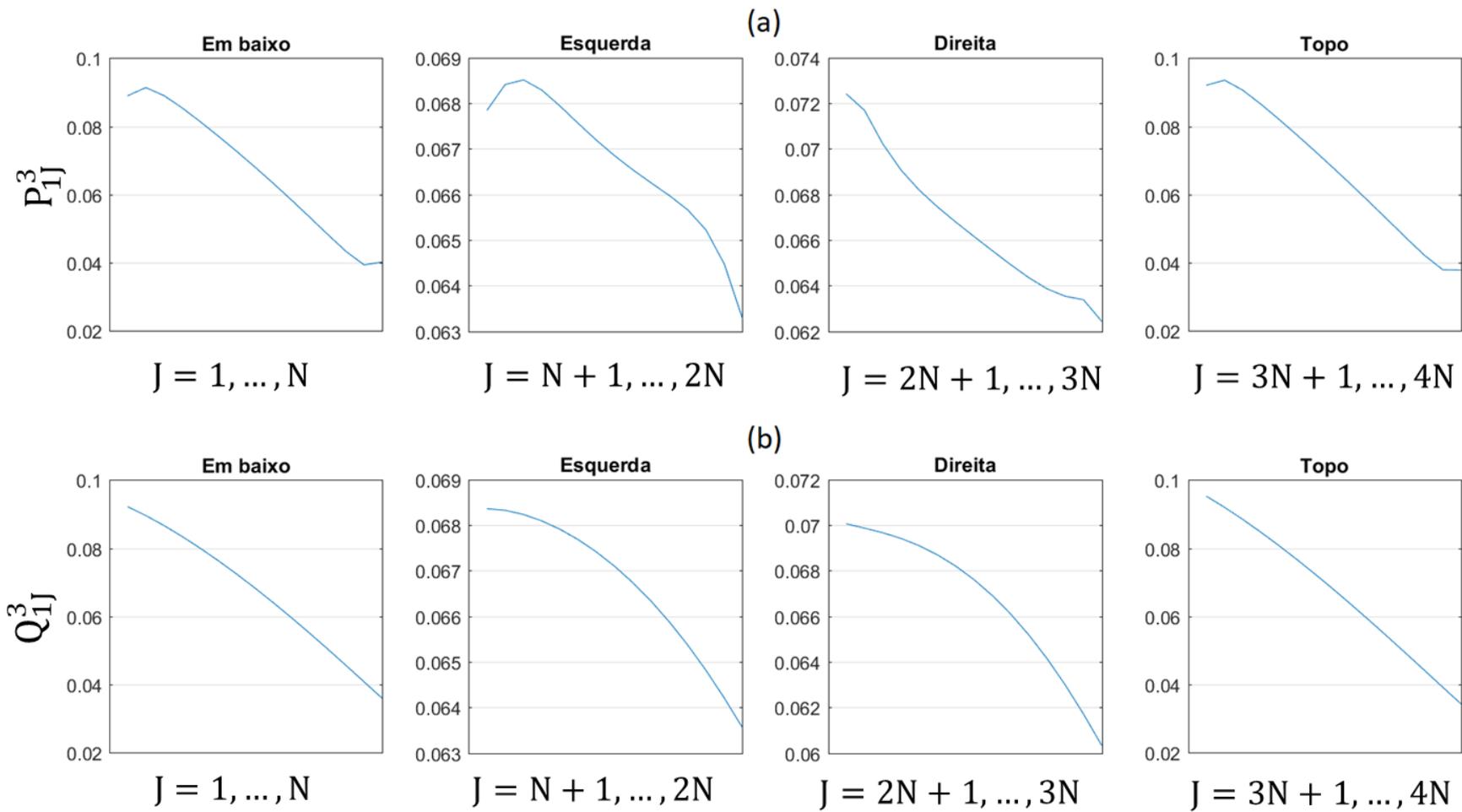


Figura 6.7: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 3, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

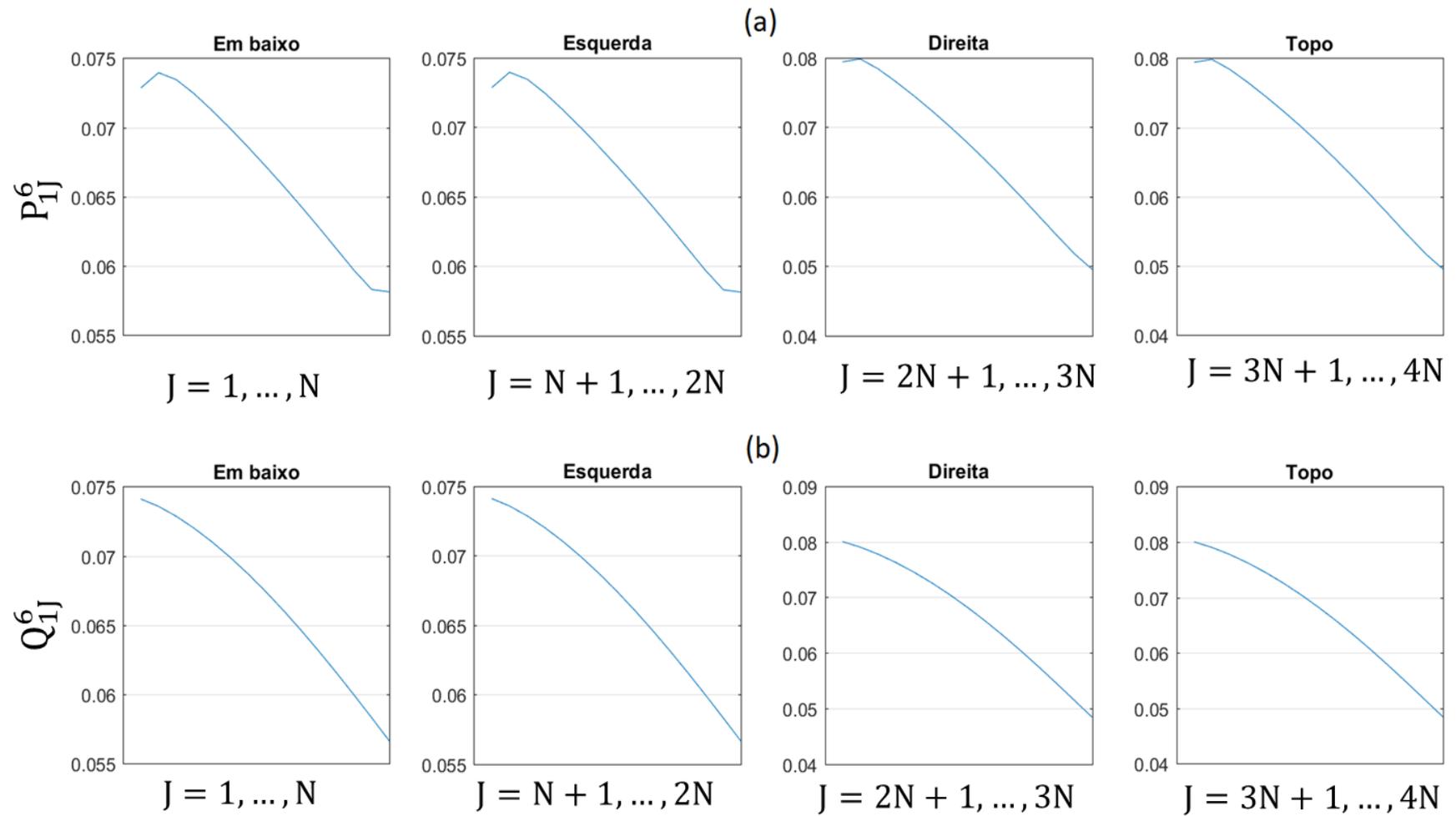


Figura 6.8: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 5, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

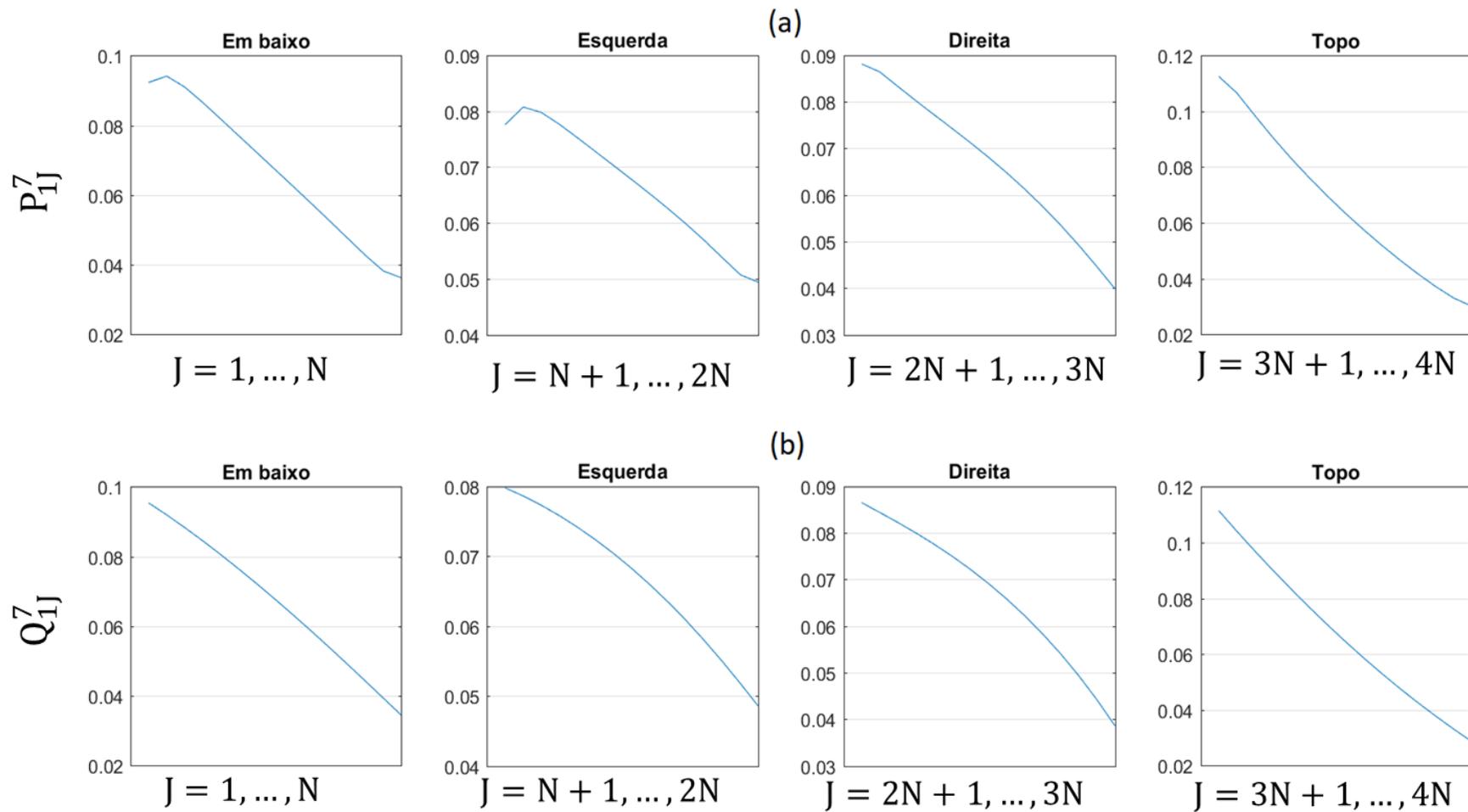


Figura 6.9: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 6, para o grupo 1, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

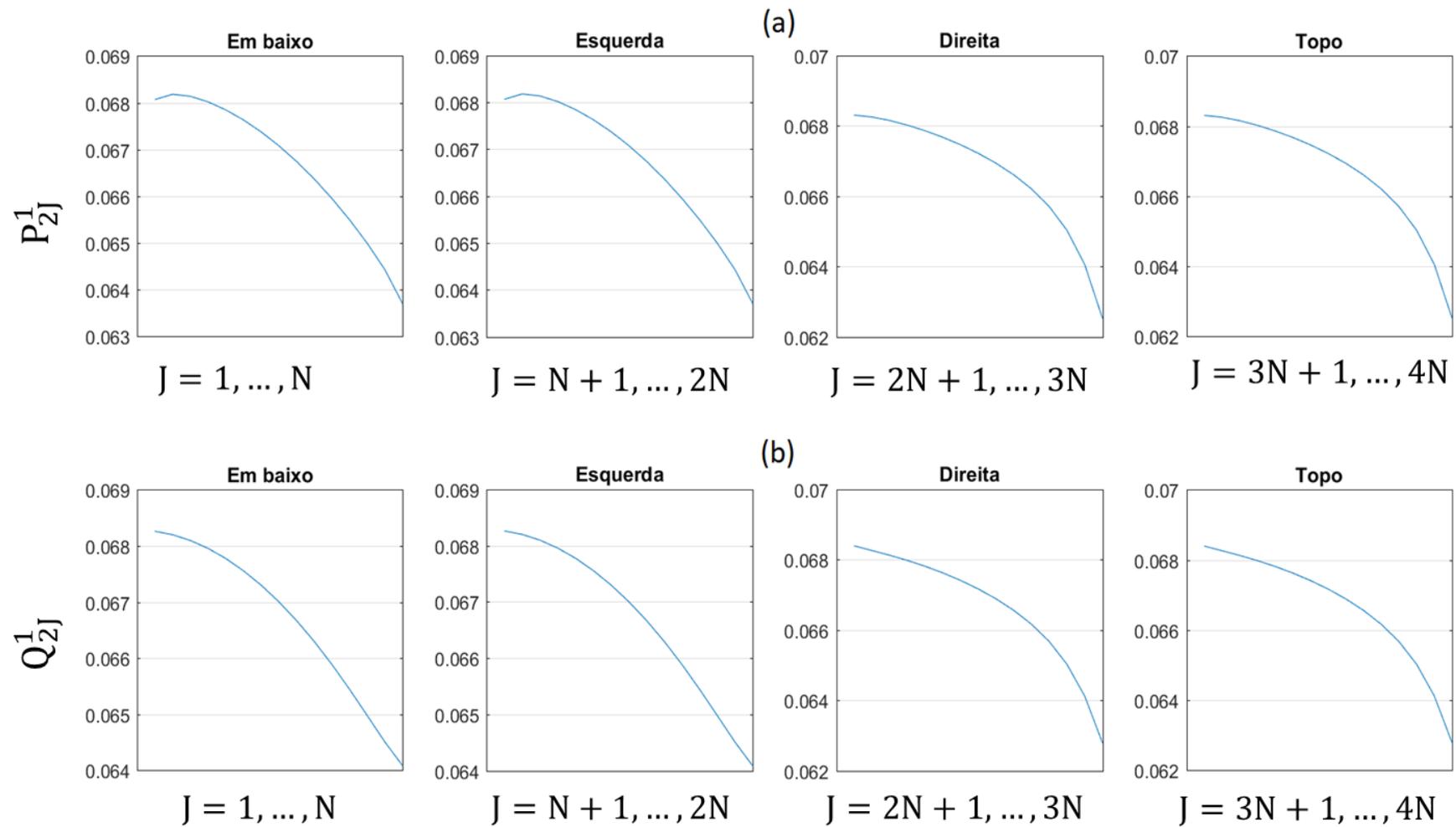


Figura 6.10: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 1, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

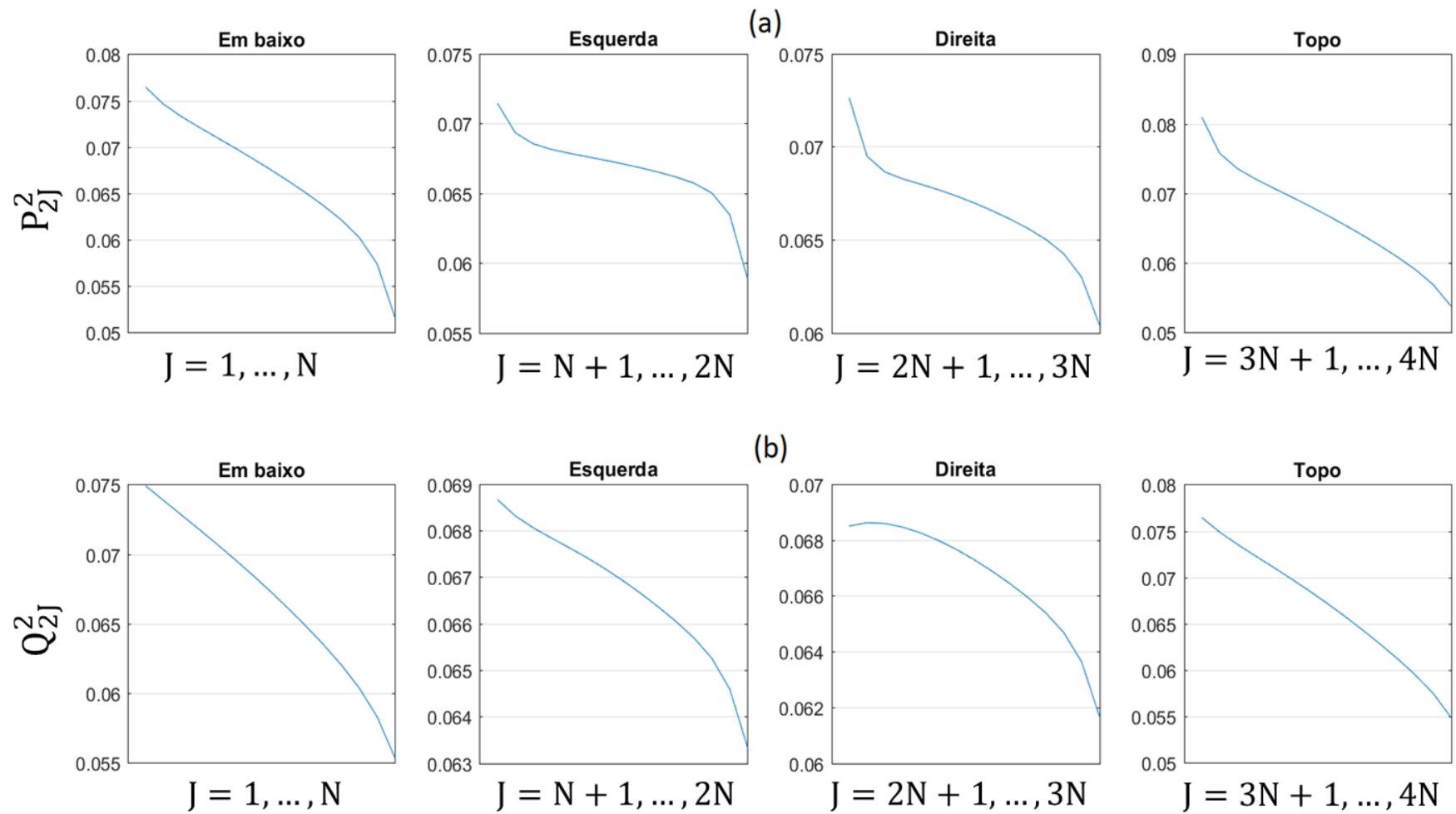


Figura 6.11: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 2, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

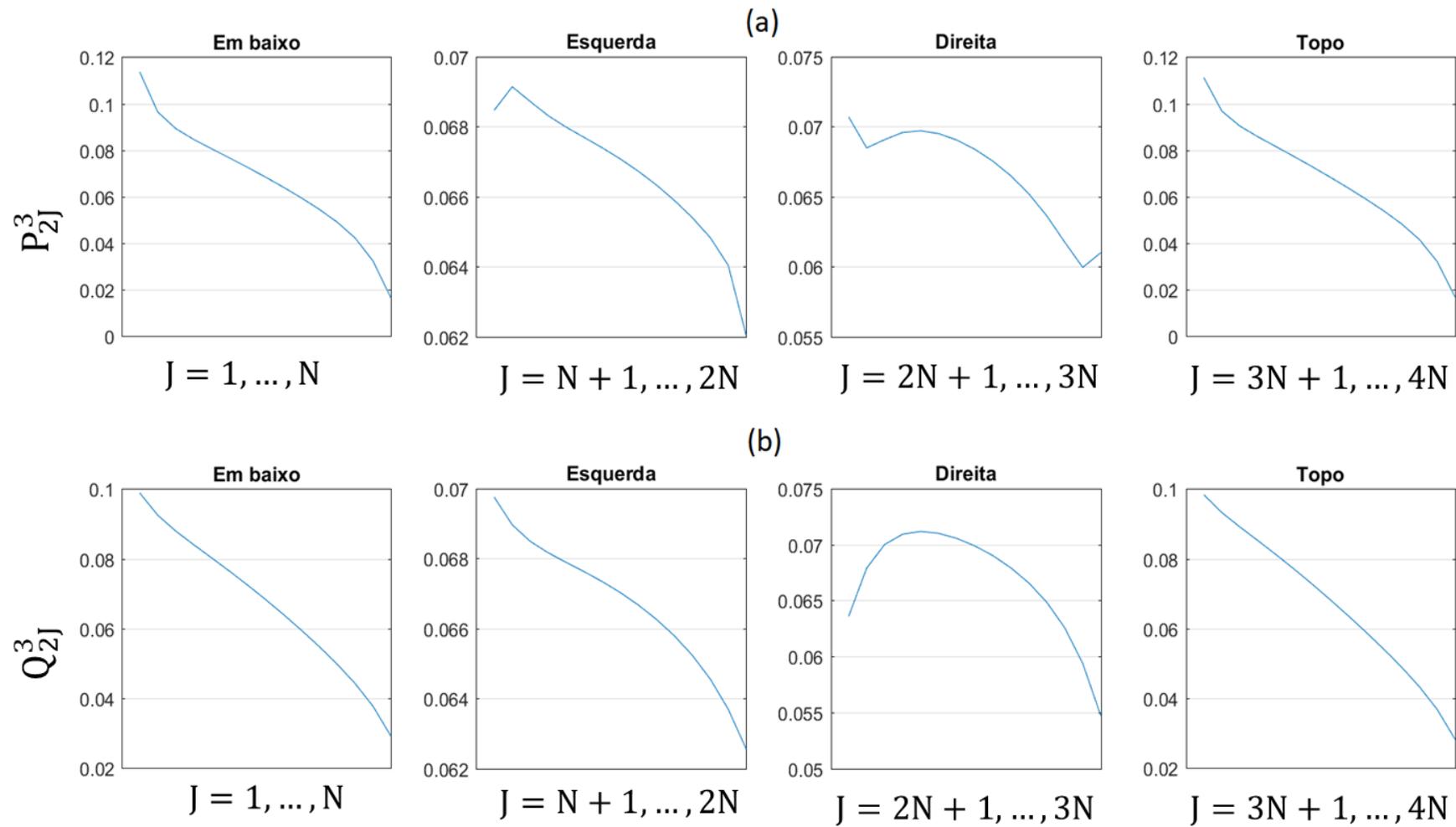


Figura 6.12: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 3, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

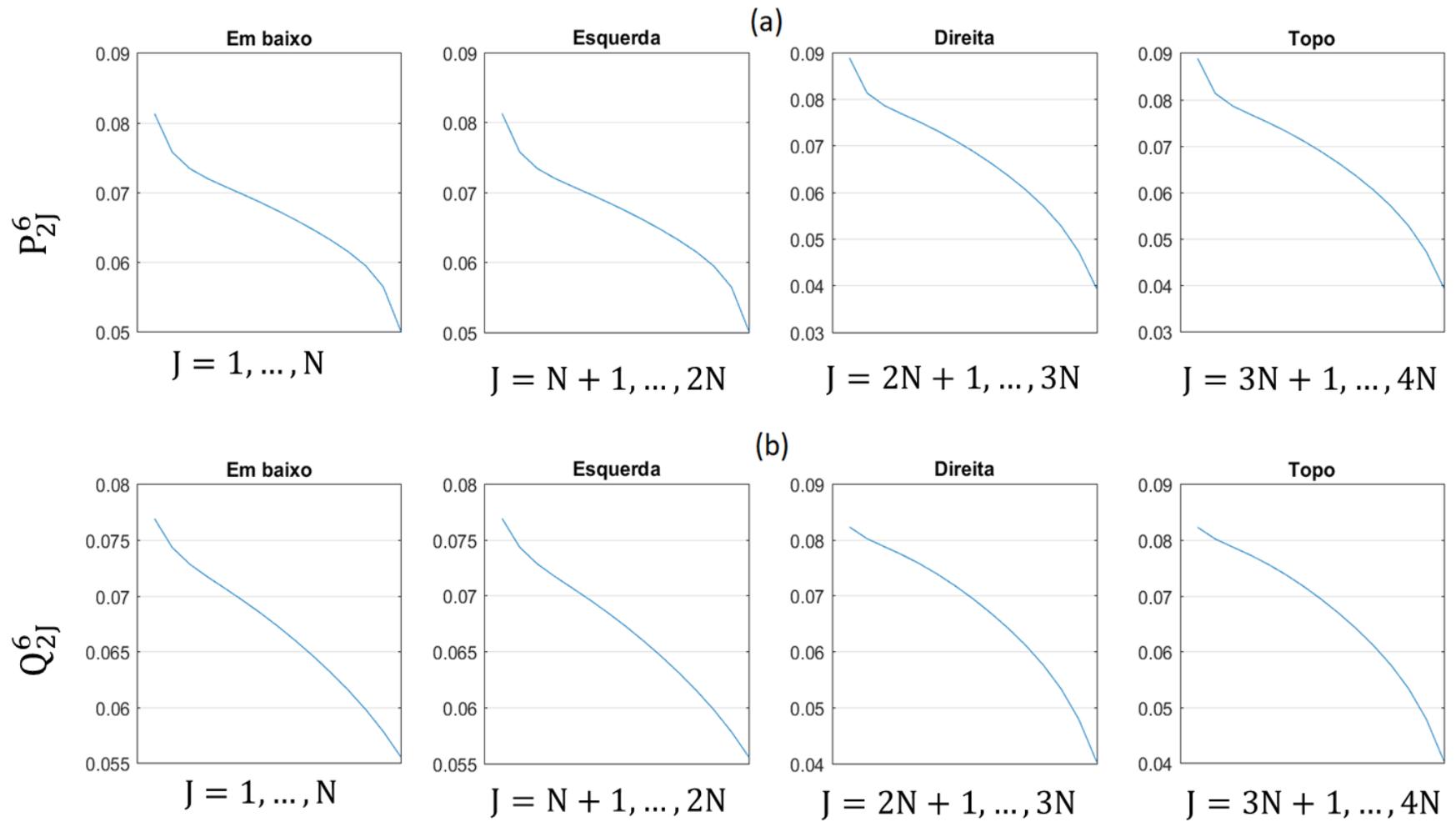


Figura 6.13: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 5, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

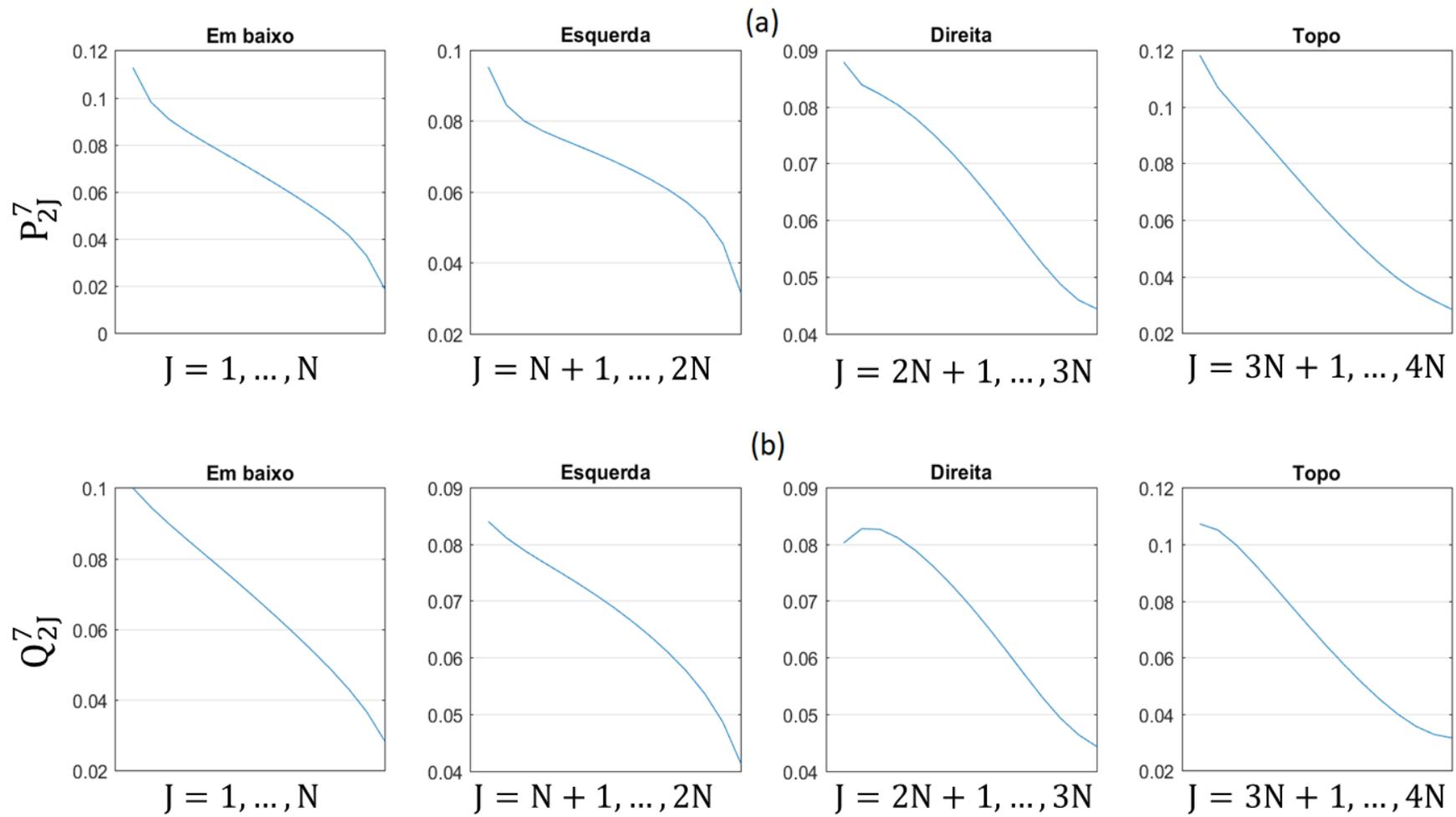


Figura 6.14: Distribuições de probabilidades nas faces do EC 6, para o grupo 2, obtida pelo MME (a) e a distribuição a priori (b)

## 6.5 Normalização das Densidades de Potência Reconstruída e de Referência

Para validar a distribuição da densidade de potência reconstruída, com relação à de referência, se faz necessário obter as constantes de normalização para cada uma das distribuições. A densidade de potência heterogênea reconstruída normalizada ( $\hat{p}_{\text{het}}^{\ell,k,n}$ ) e a densidade de potência heterogênea de referência normalizada ( $\hat{p}_{\text{Ref}}^{\ell,k,n}$ ), para cada nodo  $n$  na célula  $(\ell, k)$  são dadas pelas equações:

$$\hat{P}_{\text{het}}^{\ell,k,n} = C_{\text{Rec}}^n \bar{P}_{\text{het}}^{\ell,k,n} \quad (6.1)$$

e

$$\hat{P}_{\text{Ref}}^{\ell,k,n} = C_{\text{Ref}}^n \bar{P}_{\text{Ref}}^{\ell,k,n}, \quad (6.2)$$

com as constantes de normalização dadas pelas seguintes equações:

$$C_{\text{Rec}}^n = \frac{100}{\sum_n \sum_{\ell,k=1}^N \bar{P}_{\text{het}}^{\ell,k,n} a_{\text{cel}}^2} \quad (6.3)$$

e

$$C_{\text{Ref}}^n = \frac{100}{\sum_n \sum_{\ell,k=1}^N \bar{P}_{\text{Ref}}^{\ell,k,n} a_{\text{cel}}^2}, \quad (6.4)$$

sendo  $a_{\text{cel}}^2$  a área de qualquer célula.

Após as normalizações das densidades de potência, o cálculo do desvio entre  $\hat{p}_{\text{het}}^{\ell,k,n}$  e  $\hat{p}_{\text{Ref}}^{\ell,k,n}$ , para célula  $(\ell, k)$  do nodo  $n$ , é obtido da seguinte maneira:

$$\text{Desvio}(\ell, k, n) \equiv \frac{\hat{P}_{\text{het}}^{\ell,k,n} - \hat{P}_{\text{Ref}}^{\ell,k,n}}{\hat{P}_{\text{Ref}}^{\ell,k,n}} \times 100\%. \quad (6.5)$$

A tabela 6.7 mostra os desvios máximos obtidos, para cada um dos diferentes ECs, que como dito anteriormente, são representados por nodos.

Tabela 6.7 Desvios máximos de potência para os diferentes ECs

EC	Reconstruído	Referência	Célula ( $\ell, k$ )	Desvio (%)
1	0,0407	0,0409	(1,1)	-0,4
2	0,0385	0,0377	(1,1)	2,1
3	0,0088	0,0099	(15,15)	-11,3
5	0,0172	0,0184	(15,15)	-6,1
6	0,0087	0,0097	(1,15)	-10,8

Na tabela 6.7 é possível verificar que tanto o EC 3 quanto o EC 6 apresentaram desvios máximos altos, o que se explica pelo fato desses ECs estarem situados próximos à região de baffle e refletor, sofrendo influência do mesmo, e acarretando um aumento do desvio. Entretanto, deve-se ressaltar, que a região onde ocorrem esses desvios são áreas de baixa densidade de potência, e a medida que as células vão se afastando da região de contorno os desvios diminuem.

As tabelas 6.8 e 6.9 mostram a distribuição dos desvios nos ECs 3 e 6, respectivamente, e nelas é possível verificar que os desvios de fato diminuem quando as células se afastam do contorno.

Tabela 6.8 Desvios (%) na distribuição de densidade de potência pino a pino para o

EC 3

4,26	3,64	2,92	2,49	2,17	1,8	1,44	1,16	0,81	0,17	-0,73	-1,98	-4,22	-8,03	-11,28
1,68	2,22	2,07	1,82	1,67	1,23	0,78	0,65	0,44	-0,29	-1,12	-1,72	-2,92	-4,2	-3,9
1,03	1,71		1,36	1,35		0,4	0,47	0,57		-0,99	-1,17		-3,06	-2,37
0,67	1,29	1,33	1,17	0,97	0,57	0,3	0,4	0,56	0,24	-0,56	-1,07	-1,68	-2,31	-1,74
0,42	1	1,04	0,96		0,28	0,24	0,31	0,45	0,49		-0,93	-1,53	-2,12	-1,44
0,25	0,87		0,62	0,51	0,31	0,27	0,22	0,22	0,29	0,03	-0,35		-2,13	-1,26
0,07	0,59	0,62	0,46	0,41	0,4	0,41	0,14	-0,12	-0,07	-0,08	-0,26	-0,95	-1,63	-0,96
-0,06	0,39	0,45	0,37	0,35	0,43	0,54		-0,33	-0,26	-0,22	-0,39	-0,9	-1,34	-0,74
-0,06	0,44	0,44	0,29	0,26	0,29	0,37	0,15	-0,14	-0,15	-0,19	-0,37	-1,02	-1,59	-0,76
0,04	0,65		0,38	0,24	0,08	0,11	0,11	0,1	0,12	-0,15	-0,44		-1,95	-0,83
0,16	0,74	0,79	0,7		0,01	-0,01	0,09	0,22	0,28		-0,93	-1,37	-1,78	-0,74
0,36	0,94	0,97	0,85	0,67	0,23	-0,03	0,08	0,24	-0,02	-0,66	-1,06	-1,55	-1,91	-0,82
0,72	1,34		1	0,98		0,01	0,08	0,21		-1,12	-1,18		-2,59	-1,28
1,41	1,89	1,69	1,36	1,16	0,72	0,24	0,09	-0,05	-0,64	-1,37	-1,85	-2,84	-3,85	-2,87
4,16	3,35	2,35	1,7	1,26	0,84	0,45	0,19	-0,1	-0,64	-1,42	-2,57	-4,72	-8,43	-11,15

Tabela 6.9 Desvios (%) na distribuição de densidade de potência pino a pino para o EC 6

-6,72	2,37	4,25	3,79	2,68	1,35	0,17	-0,85	-2,02	-3,41	-4,58	-5,27	-5,18	-3,07	3,64
-5,39	-1,56	-0,47	-0,17	-0,24	-0,99	-1,36	-1,39	-1,82	-2,93	-3,57	-3,69	-4,01	-3,11	0,39
-2,89	-1,29		-0,83	-0,60		-1,36	-1,05	-0,82		-2,44	-2,30		-3,03	-1,44
-1,44	-0,75	-0,44	-0,53	-0,63	-0,74	-0,86	-0,62	-0,21	-0,41	-1,41	-1,75	-2,01	-2,54	-2,07
-0,66	-0,41	-0,38	-0,26		-0,68	-0,62	-0,44	-0,11	0,14		-1,35	-2,04	-2,64	-2,31
-0,14	0,11		-0,04	0,02	-0,24	-0,37	-0,43	-0,27	0,10	0,04	-0,40		-2,57	-2,29
0,20	0,39	0,41	0,20	0,14	0,08	-0,03	-0,43	-0,60	-0,33	-0,18	-0,29	-1,00	-1,99	-2,03
0,45	0,51	0,44	0,28	0,23	0,30	0,42		-0,59	-0,50	-0,46	-0,67	-1,28	-1,95	-1,95
0,80	0,88	0,62	0,35	0,27	0,31	0,47	0,28	-0,17	-0,34	-0,53	-0,85	-1,70	-2,44	-2,10
1,30	1,55		0,76	0,41	0,20	0,27	0,26	0,13	-0,04	-0,53	-0,90		-2,78	-2,19
1,88	2,11	1,90	1,52		0,31	0,21	0,26	0,31	0,25		-1,20	-1,79	-2,56	-2,10
2,62	2,66	2,28	1,91	1,49	0,71	0,28	0,33	0,42	0,07	-0,60	-1,18	-2,01	-2,75	-2,20
3,71	3,45		2,19	1,92		0,46	0,44	0,54		-0,90	-1,09		-3,28	-2,62
5,52	4,32	3,39	2,61	2,13	1,47	0,78	0,51	0,38	-0,17	-0,95	-1,48	-2,62	-4,09	-3,99
9,30	5,60	3,85	2,80	2,08	1,44	0,90	0,54	0,25	-0,25	-0,97	-1,99	-3,90	-7,35	-10,78

Como pode ser visto na figura 6.7, as distribuições de probabilidade nas faces do EC 3, não tiveram um bom ajuste com relação a distribuição obtida a priori, principalmente para a face direita, o que acarretou os altos desvios nas células (15,15) e (1,15).

Já na figura 6.9, que representa o EC 6, é possível verificar que a distribuição de probabilidade nas faces esquerda e na face de embaixo não se ajustam bem à distribuição a priori, o que acarreta um desvio de 9,3% na célula (1,1). O desvio de -10,78%, na célula (1,15) do EC 6, ocorre devido a interferência das distribuições de probabilidades na face de baixo do EC 6 e das faces da direita e de cima do EC 3.

A figura 6.15 mostra a distribuição de densidade de potência heterogênea pino a pino, tanto para a de referência quanto para aquela reconstruída, sendo possível observar que ambas as distribuições possuem o mesmo padrão de distribuição. Já na figura 6.16 tem-se a distribuição dos desvios no núcleo, sendo possível verificar que os maiores desvios se encontram em ECs com faces voltadas para a região de baffle/refletor, mas, para ECs que estão no núcleo do reator os desvios são baixos.

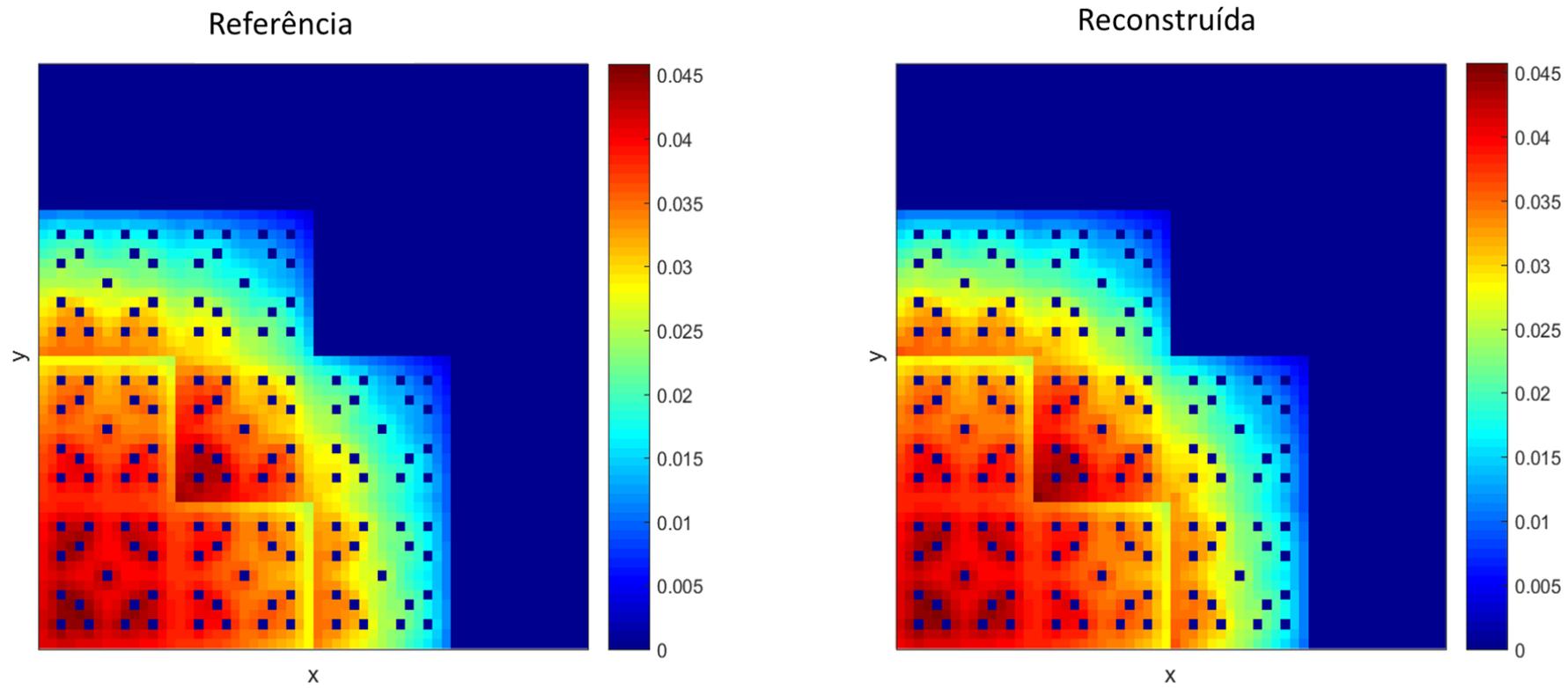


Figura 6.15 Distribuições de densidade de potência de referência e reconstruída

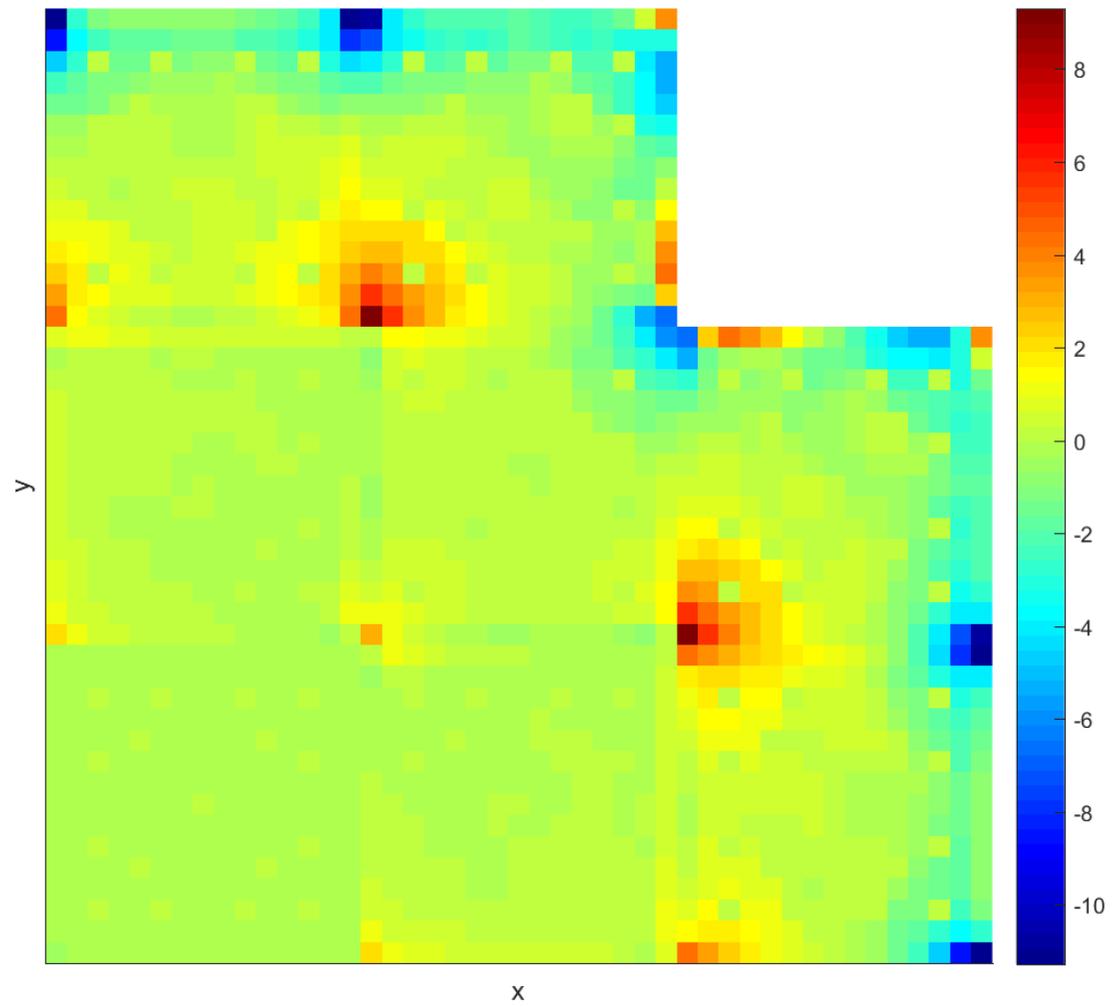


Figura 6.16 Distribuição dos desvios entre as densidades de potência de referência e reconstruída

# Capítulo 7

## Conclusão

Esta dissertação teve como objetivo o desenvolvimento de um método de reconstrução da distribuição de densidade de potência heterogênea pino a pino, utilizando o Método da Máxima Entropia (MME). O conceito central do uso do MME estava na determinação da distribuição homogênea de fluxo de nêutrons pino a pino, em um Elemento Combustível (EC) homogeneizado. E, para tal, a equação da difusão de nêutrons foi discretizada, por diferenças finitas, em malhas do tamanho de uma célula de combustível.

A equação resultante desta discretização da equação da difusão de nêutrons, em um EC homogeneizado, tinha como termo de fonte os fluxos médios nas faces externas das células no contorno do EC. E foi para a determinação destes fluxos médios que o MME foi usado, juntamente com as grandezas médias oriundas de um cálculo nodal de malha grossa.

Embora a precisão dos cálculos nodais globais de malha grossa não fosse o objetivo desta dissertação, os seus resultados certamente influenciam nos resultados dos cálculos de reconstrução da distribuição de densidade de potência heterogênea pino a pino. Então, somente como informação complementar, cabe dizer que o programa NEM2D, utilizado nesta dissertação, gerou resultados excelentes. O desvio no  $k_{\text{eff}}$  foi de -0,0054% enquanto que o maior desvio na distribuição de densidade de potência média nodal foi -0,67%, para o núcleo do reator EPRI-9, quando comparados com a referência. Ou seja, tanto o processo de homogeneização quanto os cálculos nodais de malha grossa geraram resultados excelentes. Sendo assim, pode-se afirmar que os desvios encontrados na reconstrução são devido ao método empregado para esta finalidade.

O núcleo do reator EPRI-9 foi utilizado como referência para validar os resultados obtidos no método de reconstrução desenvolvido neste trabalho. Para este reator obteve-se a densidade de potência heterogênea pino a pino de referência, usando

cálculos de malhas finas, os mesmos cálculos usados na comparação dos resultados dos cálculos nodais de malha grossa que foram acima citados.

Conforme se pode ver dos resultados apresentados, os maiores desvios, oriundos da comparação entre as densidades de potência reconstruída e de referência, foram em ECs voltados para a região do baffle/refletor. No EC 3, onde o maior desvio foi de -11,3% na célula (15,15) e no EC 6, onde o maior desvio foi de -10,8% na célula (1,15). Pode-se observar que estas células se encontram na periferia do EC, possuem faces voltadas para a região de baffler /refletor e os valores da densidade de potência são baixos.

Para os ECs 1, 2 e 5, por exemplo, os maiores desvios foram -0,4%, 2,1% e -6,1%, respectivamente. Observa-se, então, que o desvio aumenta à medida que os ECs possuem faces voltadas para a região de baffle/refletor. O EC 5, por estar próximo da região do baffle/refletor sofre a sua interferência e passa ter um desvio maior, embora seja na célula (15,15), onde a densidade de potência é baixa.

Então, pode-se concluir que a região do baffle/refletor influencia bastante na reconstrução da densidade de potência heterogênea pino a pino, embora não seja a única responsável pelos altos desvios. Deve ser lembrado que para o cálculo das distribuições de probabilidades, pelo MME, fez-se uso de uma distribuição de probabilidades obtida a priori. No cálculo desta última foram usados os chamados fatores de descontinuidade nos cantos do EC, que ainda merecem atenção e mais estudos. Logo, eles também podem ter contribuído negativamente para os resultados obtidos.

Mas, independentemente disto tudo, pode-se concluir que o método de reconstrução desenvolvido mostrou ser uma boa alternativa para a reconstrução da densidade de potência heterogênea pino a pino, pois os maiores desvios foram em células da periferia dos ECs mais afastados do centro do núcleo, onde os desvios foram baixos.

Então, como trabalho futuro, sugere-se aprofundar os estudos no cálculo dos fatores de descontinuidade nos cantos do EC e na obtenção de uma distribuição de probabilidades a priori, que seja mais adequada ao Método da Máxima Entropia utilizado. E, por fim, aplicação do método desenvolvido em cálculos 3D.

# Referências Bibliográficas

ABBAS, Ali E.. Entropy Methods for Joint Distributions in Decision Analysis. Transactions On Engineering Management, v. 53, n. 1, p.146-156, fev. 2006.

ANCALLA, Lourdes Pilar Zaragoza. O método da Máxima Entropia Para a Reconstrução Da Distribuição Pino a Pino do Fluxo de Nêutrons Em um Elemento Combustível. 2005. 69 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Nuclear, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

BARROS NETO, Oton Osório de; ASSIREU, Arcilan Trevenzoli; EPIPHANIO, José Carlos Neves. Método da Máxima Entropia para a Caracterização de Curvas Espectrais: Uma Proposta de Metodologia. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SENSORIAMENTO REMOTO, 9., 1998, Santos. Anais.. Santos: Inpe, 1998. p. 1275 - 1281.

BÖER, R.; FINNEMANN, H.. Fast analytical flux reconstruction method for nodal space-time nuclear reactor analysis. Annals Of Nuclear Energy. Erlangen, p. 617-628. out. 1992.

BRUSH, Stephen G.. The Kind of Motion We Call Heat: A History of the Kinetic Theory of Gases in the Nineteenth Century, Book 1: Physics and the Atomists. College Park: North-holland, 1976.

BYRNE, Charles L.. A First Course in Optimization. New York: Crc Press, 2015.

CASTILHO, José Eduardo. Cálculo Numérico. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2001. Disponível em: <<http://www1.univap.br/spilling/CN/apostila4.pdf>>. Acesso em: 18 abr. 2017.

COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR. CNEN NN 1.14: Relatório de Operação de Usinas Nucleares. Rio de Janeiro: Cnen, 2002.

CONTI FILHO, Paulo. RECONSTRUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE POTÊNCIA NUCLEAR NO ELEMENTO COMBUSTÍVEL HETEROGÊNEO. 2005. 141 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Nuclear, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

CRAWFORD, Douglas S.; SAAD, Tony; RING, Terry A.. Verification and validation of the maximum entropy method for reconstructing neutron flux, with MCNP5, Attila-7.1.0 and the GODIVA experiment. *Annals Of Nuclear Energy*, v. 53, p.188-191, mar. 2013. Elsevier BV.

FINNEMANN, H; BENNEWITZ, F.; WAGNER, M R. The determination of the pin power distribution in a reactor core on the basis of nodal coarse mesh calculation. *Atomkernenergie*, v. 30,p.123,1977

JAYNES, E. T.. Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical Review*, v. 106, n. 4, p.620-630, 15 maio 1957. American Physical Society (APS).

JOO, H.G.,ZEE, Q. S., DOWNAR, T.J. AND EBERT, D. D., Consistent Analytic Pin Power Reconstruction Method for Static and Transient Reactor Safety Analysis, N&C'99-Madrid, Spain, Sep. 27-30, 1999.

JUNG, Woo Sik; CHO, Nam Zin. The Maximum Entropy Method for Reconstruction of the Pointwise Neutron Flux Distribution in Nodal Methods. *Nuclear Science And Engineering*. Seoul, p. 384-395. ago. 1991.

KHALIL, Hussein Shoukry. The application of nodal methods to pwr analysis. 1983. 218 f. Tese (Doutorado) - Curso de Nuclear Engineering, Massachusetts Institute Of Technology, Massachusetts, 1983.

KOEBKE, K., Wagner, M. R. “The determination of the pin power distribution in a reactor core on the basis of nodal coarse mesh calculations.” *Atomkernenergie*, v. 30, n. 2, p.136-142, 1977.

KOEBKE, K.; HETZELT, L. “On the Reconstruction of Local Homogeneous Neutron Flux and Current Distributions of Light Water Reactors from Nodal Schemes”. *Nuclear Science And Engineering*, v. 91, n. 2, p.123-131,1985.

PESSOA, Paulo Igor de Oliveira. MÉTODO PARA RECONSTRUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE DENSIDADE DE POTÊNCIA NUCLEAR. 2014. 89 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Nuclear, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

PESSOA, Paulo O.; SILVA, Fernando C.; MARTINEZ, Aquilino S.. Finite difference applied to the reconstruction method of the nuclear power density distribution. *Annals of Nuclear Energy*, v. 92, p.378-390, jun. 2016.

PRESSÉ, Steve et al. Principles of maximum entropy and maximum caliber in statistical physics. *Reviews of Modern Physics*, v. 85, n. 3, p.1115-1141, 16 jul. 2013. American Physical Society (APS).

SHANNON, C. E.. A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, n. 623-656, p.379-423, out. 1948.

SMITH, K.s.. Assembly homogenization techniques for light water reactor analysis. *Progress In Nuclear Energy*, v. 17, n. 3, p.303-335, jan. 1986.

STRANG, Gilbert. *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-cambridge Press, 1986.

TEIXEIRA, Danielle Gonçalves. *Reconstrução da Distribuição da Densidade de Potência Heterogênea Pino a Pino Usando o Método dos Pseudo-Harmônicos*. 2017. 91 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Nuclear, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.