



COPPE/UFRJ

DEFINIÇÃO DAS RESTRIÇÕES AOS PESOS EM ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE
DADOS (AED) POR CORRELAÇÃO CANÔNICA E REGRESSÃO LINEAR

Antonio Carlos Gonçalves

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Biomédica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Biomédica.

Orientadores: Renan Moritz Varnier Rodrigues
Almeida
Marcos Pereira Estellita
Lins

Rio de Janeiro
Julho de 2010

DEFINIÇÃO DAS RESTRIÇÕES AOS PESOS EM ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE
DADOS (AED) POR CORRELAÇÃO CANÔNICA E REGRESSÃO LINEAR

Antonio Carlos Gonçalves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS – GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA BIOMÉDICA.

Examinada por:

Prof. Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida, PhD.

Prof. Reinaldo Castro Souza, Ph.D.

Prof. Antonio Maurício Ferreira Leite Miranda de Sá, D.Sc.

Prof. José Leonardo Ribeiro Macrini, D.Sc.

Prof. Wagner de Souza Tassinari, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JULHO DE 2010

Gonçalves, Antonio Carlos

Definição das Restrições aos Pesos em Análise Envolv-
tória de Dados (AED) por Correlação Canônica e Regre-
ssão Linear / Antonio Carlos Gonçalves.- Rio de Janeiro:
UFRJ/COPPE, 2010.

VII, 82 p.:il.;29,7cm.

Orientadores: Renan Moritz Varnier Rodrigues de Al-
Meida

Marcos Pereira Estellita Lins

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/Programa de En-
genharia Biomédica, 2010.

Referencias Bibliográficas: p.33 – 38.

1.Análise envoltória de dados. 2. Correlação Canô-
nica. 3. Pesos. I. Almeida, Renan Moritz Varnier, *et al.*
II.Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Pro-
ma de Engenharia Biomédica. III. Título.

Agradecimentos

Ao Professor Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida, por ter acreditado na ideia inicial deste trabalho e pela orientação brilhante durante todo o tempo.

Ao professor Marcos Pereira Estellita Lins pela oportunidade de poder participar dos primeiros cursos de Análise Envoltória de Dados, objeto desta Tese.

A minha família que tanto insistiu para eu não desistir e aos tantos amigos que sempre acreditaram na minha capacidade, em especial aos amigos Castro e Janaína.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

DEFINIÇÃO DAS RESTRIÇÕES AOS PESOS EM ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (AED) POR CORRELAÇÃO CANÔNICA E REGRESSÃO LINEAR

Antonio Carlos Gonçalves

Julho/2010

Orientadores: Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida
Marcos Pereira Estellita Lins.

Programa: Engenharia Biomédica

Este trabalho desenvolve dois procedimentos para especificar restrições aos pesos em Análise Envoltória Dados, aplicadas aos métodos de *Wong e Beasley* e *Cone Ratio*. Para os limites de Wong e Beasley são utilizados os coeficientes de uma Análise de Correlação Canônica, e, para as relações do Cone Ratio, são usados os limites dos intervalos de confiança de uma Regressão Linear desenvolvida a partir das variáveis do modelo DEA. É mostrada a aplicabilidade do método na avaliação de hospitais SUS das capitais brasileiras e da cidade do Rio de Janeiro. Para os primeiros, foram estudadas, em suas clínicas médicas, a taxa de mortalidade geral, o tempo médio de permanência, o valor médio pago e o percentual de doenças correspondentes a neoplasias, doenças infecciosas e doenças circulatórias. Para os hospitais do Rio estudaram-se as cirurgias gástricas como função do número de leitos e do tempo de permanência no hospital. Os resultados mostraram a adequação de ambos os procedimentos, com limites coerentes para as restrições desenvolvidas e com a geração de uma base final de pesos mais homogênea.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

DEFINITION OF RESTRICTIONS ON WEIGHTS IN ENVELOPMENT IN
DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (DEA) BY CANONICAL CORRELATION
AND LINEAR REGRESSION

Antonio Carlos Gonçalves

July/2010

Advisors: Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida

Marcos Pereira Estellita Lins.

Department: Biomedical Engineering

This work presents two procedures for the specification of weight restrictions in Data Envelopment Analysis (DEA), which were applied to the *Wong and Beasley* and *Cone Ratio* methods. The coefficients of a Canonical Correlation Analysis were used for the Wong and Beasley method, while the Cone Ratio limits were based on the confidence interval limits derived from a Linear Regression developed with the DEA variables. The methods were applied to the evaluation of public hospitals in Brazilian state capitals and in the city of Rio de Janeiro, Brazil. For the medicine clinics of the former, the mortality rates, length of stay, average paid values and percent of neoplastic, infectious and circulatory diseases were studied. For the latter, gastric surgeries were studied as a function of the hospital number of beds and the patient's length of stay. The results showed that the methods were both suitable, with the identification of consistent restriction limits for both procedures and a more homogeneous set of weights.

ÍNDICE

1. Introdução.....	1
2. Objetivo.....	4
3. Revisão da Literatura.....	5
4. Fundamentos Teóricos.....	9
4.1 O Modelo “ <i>Constant Returns to Scale</i> ” – CRS.....	9
4.2 Análise de Correlação Canônica (ACC).....	13
4.3 Regressão Linear Múltipla (RLM).....	16
4.4 Obtenção dos Limites das Restrições Adicionais do Método Wong e Beasley.....	17
4.5 O Método “Cone Ratio” e o Intervalo de Confiança.....	20
4.6 Materiais e Métodos.....	21
5. Resultados.....	24
6. Discussão.....	27
7. Conclusões e Futuras direções.....	31
8. Referências.....	33
9. Anexos.....	39

1. Introdução

A Análise Envoltória de Dados (AED), introduzida por CHARNES *et al.* (1978) e estendida por BANKER *et al.* (1984), é uma metodologia não-paramétrica para estimar a eficiência relativa de unidades observadas (as unidades tomadoras de decisão – *Decision Making Units*- DMUs), com entradas e saídas comuns. Essa eficiência é definida a partir do desempenho observado das DMUs nas variáveis analisadas, sendo uma medida empírica, e, não, uma referência teórica ou conceitual. Isto faz com que seus escores sejam uma medida de comparação mais adequada (incorpora na análise múltiplas entradas e/ou saídas) do que indicadores mais comumente usados (p.ex. número de procedimentos/tempo ou taxas de mortalidade) que podem ser dependentes de características específicas de uma população (LINS e MEZA, 2000, MARINHO, 1998).

O aspecto fundamental do método estabelecer uma “região comum” (restrições) com base nos dados, criando um índice de eficiência (classificação) por meio de vetores de pesos distintos, que refletem a importância de cada variável para cada DMU, e que busca, nessa região, as unidades com um comportamento mais otimizado. O valor máximo deste índice (para cada DMU) é então assumido como um “máximo empírico” de eficiência, a partir do qual uma classificação relativa das unidades torna-se possível (MARINHO, 1998). O método também fornece valores ótimos que as variáveis devem assumir para que as DMUs, possam mudar de “ineficientes” para “eficientes”.

Na área da saúde, a AED tem sido utilizada, por exemplo, para estabelecer padrões de referência para hospitais, clínicas, serviços de saúde ou mesmo cirurgias, em vários países (CHILINGERIAN, 1996, DEXTER, 2004, FELDER, 2004, KIRIGIA, 2004, RETZLAFF – ROBERTS, 2004, VALDMANIS, 2004).

No entanto, a formulação original do modelo AED (CHARNES *et al.*, 1978)

permite a variação completa dos pesos (modelo irrestrito), acarretando como problema que valores dos pesos assim obtidos podem apresentar contradições à luz de informações anteriores, e, até mesmo, levar a que variáveis importantes para a análise sejam descartadas (estabelecimento de peso zero). Adicionalmente, a flexibilidade total na seleção dos pesos permite que as DMUs possam representar circunstâncias particulares, o que é contraditório com a suposição de serem elas unidades homogêneas (consistentemente semelhantes). Portanto, o interesse encontra-se em estabelecer limites nos quais esses pesos podem variar, permitindo certa coerência em seus valores, os quais podem, então, ser utilizados na formação dos escores de eficiência. Esses limites representam restrições adicionais na formulação original do modelo.

Embora métodos de restrição aos pesos em AED tenham sido desenvolvidos para lidar com esse problema, nenhum deles aborda a maneira de como especificar os valores para os limites de restrição, propondo, em lugar disso, que um perito ou tomador de decisão diretamente, e subjetivamente, indique os valores vinculados aos intervalos em que os pesos devem variar. Na prática, isto é inviável na maioria dos casos, e pode introduzir um sério viés nos modelos assim estimados.

O desenvolvimento deste trabalho teve como ponto de partida os artigos de SENGUPTA (1990) e FRIEDMAN e SINUANY - STERN (1997), que comparam as classificações obtidas pela AED e pela Análise de Correlação Canônica (ACC) em um estudo de 21 departamentos da Universidade de Ben-Gurion em Israel, mostrando que as duas classificações não diferiam significativamente em relação à ordem dos departamentos. Nesse mesmo trabalho, para evitar pesos de valor zero, os autores sugerem que restrições aos pesos na AED poderiam ser construídas ao redor dos pesos comuns da ACC. É sabido que a Análise de Correlação Canônica é o método de escolha para a identificação da correlação máxima entre combinações lineares dos dois

conjuntos de variáveis (SENGUPTA, 1990). Mais especificamente, FRIEDMAN e SINUANY- STERN (1998), considerando o trabalho desenvolvido por SENGUPTA (1990) sobre testes estatísticos para especificar uma estrutura de variáveis para a AED, propôs o uso de variáveis cujos coeficientes das combinações lineares (pesos canônicos) de entradas e saídas fossem estritamente positivos: *Se algum peso é negativo, isso pode indicar que, em média, a variável relevante não contribui positivamente para a entrada ou saída, indicando para o tomador de decisão que a maioria das unidades está mal representada naquela variável, justificando compulsoriamente a sua omissão* (FRIEDMAN e SINUANY- STERN,1998), página 783.

O texto a seguir consiste das seguintes seções: Objetivo; Revisão de literatura abordando o contexto histórico do julgamento das variáveis (restrições aos pesos) e aplicações na área de saúde; Metodologia do desenvolvimento dos fundamentos teóricos para a especificação dos limites de pesos, Resultados, Discussão, Conclusões e Anexos contendo os artigos (publicado e submetidos).

2. Objetivo

O objetivo deste trabalho é apresentar metodologias que permitam corrigir a deficiência empírica (pesos “zeros”) do modelo AED irrestrito, que, como mencionado, pode fazer com que variáveis relevantes para a formação dos escores de eficiência sejam erroneamente descartadas. Para tal, pretende-se que a definição dos intervalos de variação dos pesos seja feita de forma objetiva e estatisticamente coerente com o que preceitua a AED (aumento de *entradas* deve refletir em aumento de *saídas*).

Para tal, os métodos de restrição de WONG e BEASLEY (1990) e “Cone Ratio” (CHARNES *et al.*, 1990) e os modelos de Análise de Correlação Canônica (ACC) e Regressão Linear Múltipla (RLM) foram empregados para avaliar a clínica médica dos hospitais do SUS das capitais brasileiras e a clínica cirúrgica dos mesmos hospitais (SUS) da cidade do Rio de Janeiro, respectivamente. Adicionalmente, buscou-se um procedimento de definição de limites que evitasse a inviabilidade do modelo de programação linear da AED.

3. Revisão da Literatura

A história da AED começa com a dissertação (Ph.D) de Edward Rhodes, tendo como orientador W. W Cooper, publicada em 1978 (CHANES *et al.*, 1978). O problema abordado na tese era o de comparar a eficiência de escolas públicas (Decision Making Units – DMUs), desenvolvendo um modelo para estimar sua eficiência sem recorrer ao arbítrio de pesos para cada variável de entrada ou saída. O método foi baseado em algoritmos de maximização matemática, e, com o empenho de Charnes e Cooper, os modelos AED ganharam maior divulgação. Esses modelos ganharam a denominação de modelo original CCR (sigla para Charnes, Cooper e Rhodes).

No Brasil, um dos primeiros trabalhos na área da saúde é atribuído a MARINHO (1998), em um estudo envolvendo seis variáveis de produção (entradas e saídas) de seis hospitais públicos e privados. Como a AED requer DMUs homogêneas para serem avaliadas, GONÇALVES (2001a) propôs a aplicação não em um hospital como um todo, mais a clínicas (médica e cirúrgica) de hospitais, usando variáveis qualitativas (taxa de mortalidade, tempo médio de permanência, e vários tipos de doenças). O autor também desenvolveu um estudo de eficiência e cobertura das ações básicas do Programa de saúde bucal da prefeitura da cidade do Rio de Janeiro (GONÇALVES, 2001b) usando a Análise de Correlação Canônica (ACC) para a seleção de variáveis. Esse mesmo trabalho foi estendido por LINS *et al.* (2004) usando Análise de Componentes Principais para projetar uma DMU na fronteira eficiente.

Como mencionado, em termos metodológicos, um problema que logo foi identificado diz respeito à variação (flexibilidade) total dos pesos das variáveis utilizadas na AED. Assim, como variáveis (entradas ou saídas) de menor importância podem dominar o estabelecimento da eficiência de uma DMU, isto é, podem ter um alto peso, outras de maior importância podem assumir peso zero (LINS e MEZA, 2000).

THOMPSON *et al.* (1986), foram os primeiros a propor o uso de restrições aos pesos para aumentar a capacidade discriminativa na AED. No caso, o problema referia-se a identificar a localização ideal de um laboratório de alta energia física no Texas e avaliar as vantagens de suas possíveis localizações. Seis locais viáveis foram identificados e uma análise comparativa foi feita através da aplicação da AED, incorporando o custo do projeto, tempo de espera do usuário, e dados de impacto ambiental. Limites aceitáveis foram arbitrados para a razão dos pesos, tendo os autores concluído que Dallas seria a preferida, devido, por exemplo, ao menor impacto ambiental, enquanto o norte de Houston apresentava-se como mais sensível ao meio ambiente.

DYSON e THANASSOULIS (1988) também estavam preocupados em descartar entradas ou saídas com pesos nulos, e sugeriram a imposição de limites (restrições) em multiplicadores (pesos) individuais com base no nível das entradas por unidade de saída para algumas DMUs. CHARNES *et al.* (1990), em outra abordagem para o problema, apresentaram um método de restrição aos pesos chamado *Cone Ratio*, utilizando um exemplo baseado em unidades bancárias. Neste caso, unidades reconhecidas como eficientes foram utilizadas em um modelo irrestrito (primeira etapa) e a razão dos seus pesos gera limites para as restrições dos pesos que são compatíveis com o problema de programação linear da AED da segunda etapa.

Para evitar o problema de restringir diretamente os pesos, que são dependentes das unidades de medidas das entradas e saídas, WONG e BEASLEY (1990) propuseram restringir percentuais de entradas e saídas *virtuais*, isto é, a entrada ou saída multiplicada por um peso e dividida pela soma de todas as entradas/saídas. HALME *et al.* (1999) oferecem, ainda, uma outra alternativa para incorporar as preferências do tomador de decisão para a avaliação das DMUs. Nesse processo, o tomador de decisão

aponta uma combinação preferida de entradas e saídas de DMUs eficientes, e, a seguir, a eficiência de cada DMU é determinada em relação a essa solução.

Outra contribuição importante foi a de ROLL e GOANY (1991), que, para evitar a influência das unidades de medida nas restrições dos pesos, propôs a normalização dos dados, já que os pesos acompanham o nível da entrada ou saída de acordo com as unidades de medida empregada, o que não ocorre com os *pesos virtuais*, adimensionais (DYSON e THANASSOULIS, 1988). Uma das desvantagens deste método é que uma vez que os resultados são obtidos, eles devem ser transformados de volta à forma original, a fim de que seja possível sua interpretação.

CHANG e CHEN (2007) apresentam uma abordagem estatística para construir os limites inferiores e superiores dos pesos, de forma a diminuir a variação na ponderação das entradas e saídas. O método consiste em construir intervalos utilizando a média e o desvio padrão dos pesos de DMUs eficientes, estabelecendo em um segundo estágio estes limites. Este procedimento permite incorporar a opinião de especialistas na estrutura que está sendo analisada, por meio da introdução de uma constante que também define a amplitude do intervalo de variação. WANG *et al.* (2009), propõe uma nova metodologia para a classificação de unidades de tomada de decisão. A variação mínima apropriada, na qual os pesos das entradas e saídas devem variar, é arbitrada por um especialista, e esta informação é usada em uma série de Problemas de Programação Linear (PPL) que são construídos especificamente para determinar um peso máximo para cada unidade AED-eficiente. Assim, para cada unidade eficiente é formulado um PPL e um peso máximo para cada entrada e saída é calculado. Em outro estágio, estes limites são utilizados como restrições aos pesos, e, no final do processo, o método permite controlar quantas unidades devem ser mantidas eficientes de acordo com exigências de aplicações reais (ou seja, uma variação mínima é

arbitrada).

A crítica geral a essas metodologias é que, embora reconhecendo a importância do problema das restrições, estes métodos não abordam a questão de forma totalmente objetiva, propondo, em vez disso, que um pesquisador deve diretamente, e, subjetivamente, arbitrar como devem se comportar as entradas e saídas e seus respectivos pesos. Portanto, os resultados do modelo original (a classificação) podem ainda ser alvo de críticas por não representarem adequadamente um modelo plausível para as unidades estudadas.

Já os métodos de restrição a seguir foram propostos no sentido de encontrar uma base comum de pesos para todas as DMUs, uma ideia que começou com ROLL *et al.* (1991) e tem sido gradualmente aceita nos últimos anos (MAKUI, 2008). Assim, SAATI (2005), preocupado com o conjunto de pesos que é gerado diferentemente para cada DMU, sugeriu encontrar uma base comum por meio de uma função objetivo construída a partir dos próprios pesos, sob a alegação de que em alguns casos é inaceitável construir a classificação da AED com pesos muito diferentes para uma mesma entrada ou saída. O modelo original, na busca da solução ótima, pode atribuir pesos “excessivos” para entradas ou saídas, ou, como dito, pesos zeros para variáveis importantes, o que prejudica a classificação estabelecida pela AED. MAKUI (2008) argumenta, seguindo SATTI (2005), que a flexibilidade dos pesos do método original da AED impede a comparação entre DMUs em uma mesma base e, portanto, propõe o uso da Programação Linear Multi-objetivo para a geração de um conjunto comum de pesos no âmbito da AED.

4. Fundamentos Teóricos

4.1 O Modelo “*Constant Returns to Scale*” – CRS (formulação original)

Como mencionado, a AED, por meio de uma comparação entre Unidades Tomadoras de Decisão (DMUs) gera uma classificação a partir de pesos atribuídos para as entradas e saídas do modelo. Assim, a AED examina as quantidades de entradas consumidas e saídas produzidas por um número de unidades homogêneas (as unidades tomadoras de decisão – *decision making units*- DMUs). A partir do desempenho observado das DMUs, uma fronteira de produção eficiente é então construída, de tal maneira que a eficiência de cada unidade é medida em relação a essa fronteira (Figura 1). No caso de uma unidade com um único par *entrada –saída*, a eficiência da unidade pode ser definida simplesmente como a razão *saída/entrada*. No caso de várias entradas e/ou saídas, a eficiência (ótica da entrada) é a razão entre a soma ponderada das saídas e a soma ponderada das entradas, e uma medida original dessa eficiência é (CHARNES *et al.*, 1978):

$$h_0 = \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s U_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m V_i x_{ij_0}} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{r=1}^s U_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m V_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$U_r, V_i \geq \varepsilon$ (ε é um número positivo infinitesimal), \forall_r e \forall_i , são os pesos (multiplicadores) a serem determinados e $y_{rj}, x_{ij} > 0$ são as saídas e entradas conhecidas da j -ésima DMU, $U_r =$ o peso dado à saída r , $V_i =$ o peso dado à entrada i , $n =$ o número de unidades, $s =$ o número de saídas, $m =$ o número de entradas. Para

cada DMU, formula-se um problema de otimização com o objetivo de determinar os valores dos multiplicadores (U_r e V_i - importância relativa de cada variável). Essa determinação é feita de modo que a DMU sob análise tenha a maior eficiência possível, ou seja, maximizando a soma ponderada das saídas (saída virtual) dividida pela soma ponderada das entradas (entrada virtual) da DMU em estudo (1), sujeita à restrição (2) de que esse quociente seja menor ou igual que 1 (logo, as eficiências variam entre 0 e 1). Este modelo (CRS) exige que crescimentos proporcionais das entradas produzam crescimentos proporcionais das saídas a fim de que uma DMU mantenha sua eficiência atual. A Figura 1 ilustra o quanto as entradas deveriam diminuir para uma DMU tornar-se eficiente.

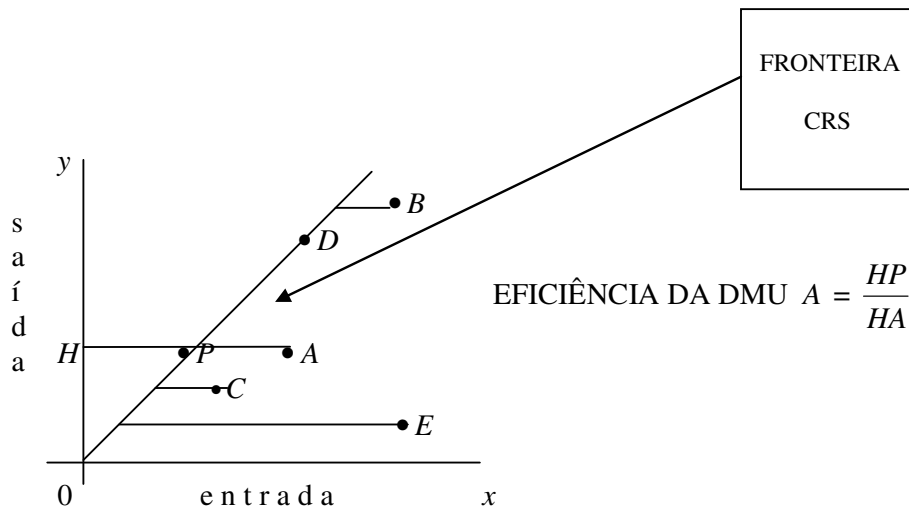


Figura 1 - AED: Fronteira CRS com a unidade D eficiente (LINS E MEZA, 2000)

Neste caso, os pontos A, B, C e E correspondem às unidades ineficientes. O ponto D é a unidade eficiente que está sobre a reta que representa a fronteira eficiente CRS, e o deslocamento de A para a fronteira eficiente (ponto P) implicaria no valor ótimo da entrada (alvo) que tornaria esta unidade eficiente.

Introduzindo as *restrições adicionais proporcionais* (3) pelo método de WONG e BEASLEY (1990), tem-se:

$$h_0 = \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s U_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m V_i x_{ij_0}}$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{r=1}^s U_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m V_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, \dots, n$$

$$a_r \leq \frac{U_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^s U_r y_{rj}} \leq b_r \quad \text{e} \quad c_i \leq \frac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^m V_i x_{ij}} \leq d_i \quad (\text{restrições adicionais proporcionais das}$$

saídas e entradas virtuais) (3)

A formulação do modelo dos multiplicadores acima, torna-se:

$$h_0 = \text{Max} \sum_{r=1}^s U_r y_{rj_0} \tag{4}$$

Sujeito a:

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m V_i x_{ij_0} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s U_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m V_i x_{ij} \leq 0, j = 1, \dots, n \\
 & i', \\
 & V_i x_{ij} - c_i \sum_{i=1}^m V_i x_{ij} \geq 0, \forall_{ij} \\
 & -V_i x_{ij} + d_i \sum_{i=1}^m V_i x_{ij} \geq 0, \forall_{ij} \\
 & U_r y_{rj} - a_r \sum_{r=1}^s U_r y_{rj} \geq 0, \forall_{rj}, \\
 & -U_r y_{rj} + b_r \sum_{r=1}^s U_r y_{rj} \geq 0, \forall_{rj}, \\
 & U_r \geq \varepsilon, \forall_r, \\
 & V_i \geq \varepsilon, \forall_i.
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Nas formulações acima ((1), (4) e (5)) é importante lembrar que a contribuição da entrada i à DMU_{j_0} é $V_i x_{ij_0}$ (entrada virtual) e $U_r y_{rj_0}$ a contribuição da saída r (saída virtual). Como será visto, o presente trabalho desenvolverá métodos objetivos para a definição desses pesos, que serão determinados com a ajuda de uma Análise de Correlação Canônica (ACC) no caso de saídas múltiplas ou por uma Regressão Linear Múltipla (RLM) no caso de uma única saída. Assim, os pesos da ACC ou da RLM estabelecem a relevância estatística das entradas e saídas, o que, conseqüentemente, acarreta em incluir entradas e saída(s) que contribuem de maneira significativa para a formação dos escores de eficiência.

É fácil verificar, pelo problema dual do modelo sem restrição (na ausência da restrição (3) aos pesos), que a medida ótima de eficiência h_0^* (escore de eficiência (1)) representa o fator $(1-h_0^*)$ radial de redução da entrada atual para tornar uma unidade sob análise ineficiente em eficiente (ALLEN *et al.*, 1997). Portanto, o fator $(1-h_0^*)$

representa a quantidade percentual de redução que deve ser aplicada a todas as entradas de uma DMU sob análise, para torná-la eficiente no novo problema.

4.2 Análise de Correlação Canônica (ACC)

A ACC, desenvolvida por Hotelling em 1936, estuda as relações lineares entre dois grupos (X e Y) de variáveis (entradas e saídas), e sua preocupação fundamental é encontrar o par de combinações lineares de X e Y que possua correlação linear máxima (BOUROCHE E SAPORTA, 1980). Por exemplo, a partir do esquema mostrado na Tabela 1, a combinação linear das variáveis de X e Y é definida como:

$$z = V_1x_{1j} + V_2x_{2j} + \dots + V_mx_{mj}$$

$$j = 1, \dots, n \tag{6}$$

$$w = U_1y_{1j} + U_2y_{2j} + \dots + U_sy_{sj}$$

Tabela 1. Estrutura das unidades e variáveis em uma Análise de Correlação Canônica. Similarmente essas variáveis podem ser consideradas como entradas e saídas em uma AED (X entradas, Y saídas).

Grupos / Unidades	$X (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$	$Y (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})$
1	$x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}$	$y_{11}, y_{21}, \dots, y_{s1}$
2	$x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}$	$y_{12}, y_{22}, \dots, y_{s2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}$	$y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{sn}$

Os coeficientes $V_i, i = 1, 2, \dots, m$ e $U_r, r = 1, 2, \dots, s$ (pesos canônicos) devem ser obtidos de forma que o quadrado da correlação entre z e w , $r^2(z, w)$, apresente seu valor máximo, o que ocorre quando a projeção do vetor z em W (espaço vetorial das combinações lineares das saídas) e w em Z (espaço vetorial das combinações lineares das entradas) são ortogonais. A Figura 2 indica como isto ocorre.

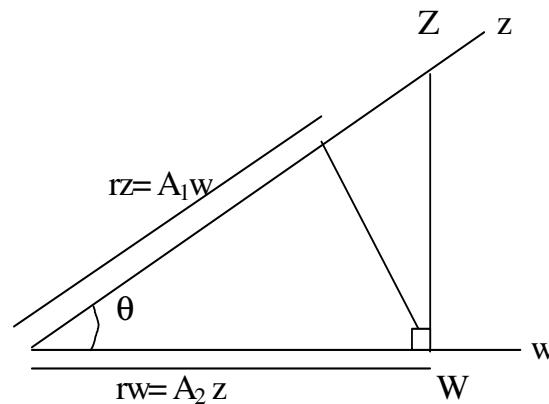


Figura 2. Projeção do vetor z em W (espaço vetorial das combinações lineares das saídas) e w em Z (espaço vetorial das combinações lineares das entradas - projeções formando um ângulo reto).

Suponha-se que as variáveis dos dois grupos sejam linearmente independentes, isto é, rank de $X_{m \times n} = m$ e rank de $Y_{s \times n} = s$. A matriz $A_{1 \times n}$ é o projetor ortogonal de $w_{n \times 1}$ e $A_{2 \times n}$ o projetor ortogonal de $z_{n \times 1}$, isto é, A_1 projeta w no subespaço de Z e vice-versa. O vetor w deve ser colinear com a projeção ortogonal de z em W (vetor que faz um ângulo mínimo com z). Esta condição é expressa como: $A_2 z = r w$, em que $r = \cos(z, w)$ (cosseno de z e w) e A_2 é o operador de projeção ortogonal em W . Tem-se, de maneira similar, que $A_1 w = r z$, e daí, pode-se deduzir que: $A_1 A_2 z = r^2 z$ e $A_2 A_1 w = r^2 w$. Conseqüentemente, z e w são respectivamente autovetores dos operadores $A_1 A_2$ e $A_2 A_1$ associados ao maior autovalor $\lambda_1 = r^2 = \cos^2(z, w)$. Da álgebra

vetorial, sabe-se que os vetores encontrados a partir deste critério formam um cosseno máximo, conseqüentemente uma correlação máxima, e z e w são chamadas de variáveis canônicas e $r(z, w)$ de correlação canônica. Essas variáveis canônicas, podem ser escritas segundo as equações $A_2 z = rw$ e $A_1 w = rz$ (Figura 2) da seguinte forma:

$$z = \frac{A_1 w}{\sqrt{\lambda}}$$

Da mesma forma deduz-se:

$$w = \frac{A_2 z}{\sqrt{\lambda}}$$

Como foi dito, as variáveis canônicas são os autovetores de $A_1 A_2 (A_2 A_1)$ associados aos autovalores ordenados em ordem decrescente. A cada etapa, é gerado um par de variáveis associado ao maior autovalor (λ_i). As matrizes A_1 e A_2 e os vetores dos pesos canônicos são obtidos por:

$$A_1 = X' (XDX')^{-1} XD$$

Por analogia:

$$A_2 = Y' (YDY')^{-1} YD$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_{11}^{-1} S_{21} U$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_{22}^{-1} S_{12} V, \text{ onde}$$

$$S_{11} = XDX'$$

$$S_{22} = YDY'$$

$$S_{21} = XDY'$$

Isto é, $V_{m \times 1}$ e $U_{s \times 1}$ são deduzidos um do outro por transformação linear, sendo $D_{n \times n}$ uma matriz diagonal de ponderação das variáveis e X' e Y' as matrizes transpostas de X e Y , respectivamente.

4.3 Regressão Linear Múltipla (RLM)

O conhecido modelo de Regressão Linear Múltipla tenta representar a relação entre duas ou mais variáveis (chamadas preditoras, insumos, independentes ou explicativas) e uma variável dependente (resposta), por uma equação linear de ajuste aos dados. As variáveis independentes são comumente representados como x_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), e a variável dependente como y_j (KRZANOWSKI, 1998, GUJARATI, 2000).

O modelo de regressão da população para m variáveis explanatórias x_{1j} , x_{2j}, \dots, x_{mj} é $y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \dots + \beta_m x_{mj} + e_j$, e o modelo descreve como a média da variável resposta y_j muda com as variáveis independentes. Assim os valores observados de y variam em torno da média de y_j , cujos desvios-padrão, por hipótese, são iguais. Os valores ajustados $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$ estimam $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ por valores amostrais.

Desde que os valores observados de y_j variam em torno de suas médias populacionais μ_j , o modelo de regressão múltipla pode ser expresso como observação = **ajuste + resíduo**, em que “ajuste” representa $\beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \dots + \beta_m x_{mj}$; e “resíduo”, também chamado “erro”, representa os desvios (e_j) dos valores observados y_j das suas médias populacionais μ_j . Os resíduos são por hipótese distribuídos normalmente com média 0 e desvio padrão σ (se estas hipóteses não podem ser

satisfeitas, outra estratégia de modelagem deve ser adotada). Os valores ajustados usando as estimativas $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1j} + \hat{\beta}_2 x_{2j} + \dots + \hat{\beta}_m$ são representados por \hat{y}_j , e as estimativas residuais \hat{e}_j são dadas por $y_j - \hat{y}_j$ (a diferença entre os valores observados e ajustados em uma amostra). O modelo de regressão linear múltipla é usualmente estimado minimizando a soma dos quadrados dos resíduos (método dos mínimos quadrados).

No teste de significância para as variáveis independentes, a hipótese de nulidade é que β_i , é igual a zero; e o teste t é baseado na estatística $\frac{\hat{\beta}_i}{S(\hat{\beta}_i)}$ (o estimador do parâmetro β_i dividido por seu erro-padrão), que segue uma distribuição Student- $t_{(n-m-1)}$ quando o modelo é estimado de uma amostra de tamanho n e tem m variáveis independentes. Um intervalo de confiança para um parâmetro β_i pode ser computado como: $\hat{\beta}_i \pm t^* S(\hat{\beta}_i)$; com t^* o respectivo valor crítico da distribuição t para 95% de grau de confiança (KRZANOWSKI, 1998, GUJARATI, 2000).

4.4. Obtenção dos Limites das Restrições Adicionais do Método Wong e Beasley

As restrições adicionais das saídas/entradas virtuais proporcionais dadas por (3) podem ser introduzidas na AED de maneira a refletir um julgamento da importância relativa das variáveis de acordo com os valores de saídas e entradas da j -ésima DMU, respectivamente. Conceitualmente, a saída virtual r é definida como $U_r y_{rj}$, que representa a contribuição da saída r para a DMU j , e analogamente o mesmo pode ser dito para uma entrada i .

Os limites a_r, b_r, c_i, d_i das restrições adicionais proporcionais das saídas e entradas virtuais **(3)** são obtidos *a priori*, substituindo os pesos das variáveis canônicas da primeira etapa (maior correlação) da ACC, nas proporções $\frac{U_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^s U_r y_{rj}}$ e $\frac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^m V_i x_{ij}}$ $\forall_{i,j}$; e geram um valor para cada DMU. Obviamente, tem-se, para cada variável, um conjunto de n valores, e o mínimo e o máximo **(7)** de cada conjunto definem os limites e a importância ou julgamento de cada variável na AED, sem a interferência direta de um decisor.

Assim, definindo U_r^1 e V_i^1 os pesos canônicos da primeira etapa, para as respectivas variáveis de entrada e saída, as proporções acima tornam-se:

$$\frac{U_r^1 y_{rj}}{w_r^1} \text{ e } \frac{V_i^1 x_{ij}}{z_i^1}, \text{ sendo:}$$

$$w_r^1 = \sum_{r=1}^s U_r^1 y_{rj} \quad z_i^1 = \sum_{i=1}^m V_i^1 x_{ij}$$

$$a_r = \min \frac{U_r^1 y_{rj}}{w_r^1} \text{ e } b_r = \max \frac{U_r^1 y_{rj}}{w_r^1} ; c_i = \min \frac{V_i^1 x_{ij}}{z_i^1} \text{ e}$$

$$d_i = \max \frac{V_i^1 x_{ij}}{z_i^1}, j = 1 \dots n \quad (7)$$

Resolvendo, **(3)** para U_r and V_i , obtém-se:

$$\frac{w_r^1 a_r}{y_{rj}} \leq U_r \leq \frac{w_r^1 b_r}{y_{rj}} \text{ e } \frac{z_i^1 c_i}{x_{ij}} \leq V_i \leq \frac{z_i^1 d_i}{x_{ij}}, \quad (8)$$

sendo w_i^1 e z_i^1 as primeiras variáveis canônicas obtidas **(6)**, e as desigualdades **(8)** definidas estatisticamente. Como os limites são escolhidos pelo mínimo e pelo máximo **(7)**, tendem a não ser muito próximos para a maioria dos casos, o que segundo SARRICO (2004) evita a inviabilidade do modelo de programação linear da AED.

Dado que esses pesos, obtidos da correlação máxima entre os conjuntos, indicam a importância de cada variável em um modelo AED (lembrando que crescimentos proporcionais das entradas deverão produzir crescimentos proporcionais das saídas), eles podem ser utilizados para gerar intervalos de restrição das entradas e saídas virtuais proporcionais. Ou seja, o conjunto de pesos das entradas e saídas da ACC pode ser interpretado como o grau de ligação entre estas variáveis, e, conseqüentemente, como a AED exige associações no mesmo sentido, estariam excluídas aquelas que não contribuem, p. ex., no caso das entradas, para um aumento das saídas (SENGUPTA, 1990, FRIEDMAN e SINUANY- STERN, 1998).

Além disso, as variáveis de saída e entrada devem ser padronizadas para evitar influências devido ao grau de “magnitude”. No caso particular em que $r = 1$, tem-se apenas uma variável de saída, cujo valor total de contribuição é 100% para a DMU_j ($U_r = 1$). A equação de regressão para m entradas $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}$ é:

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \dots + \beta_m x_{mj} + \varepsilon_j \quad (9)$$

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$ são as estimativas dos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$. Os limites c_i e d_i (7) são definidos *a priori*, substituindo os coeficientes estimados $\hat{\beta}_i = V_i^1$ das variáveis

regressoras (entradas), na proporção $\frac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^m V_i x_{ij}} \forall_{i,j}$, Daí, tem-se para $j = 1 \dots n$

$$c_i = \min \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^m V_i^1 x_{ij}} \quad \text{e} \quad d_i = \max \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^m V_i^1 x_{ij}} \quad (10)$$

Como acima, os limites abaixo tendem a evitar a inviabilidade:

$$\frac{Yc_i}{x_{ij}} \leq V_i \leq \frac{Yd_i}{x_{ij}} \quad (11)$$

$$\text{com } Y = \sum_{i=1}^m V_i^1 x_{ij}.$$

Uma vez que os $V_{is}^1 > 0$ e estatisticamente significativos indicam a importância de cada variável em um modelo AED, como no caso da ACC, eles podem ser utilizados para gerar intervalos de restrição das entradas virtuais proporcionais.

4.5 O Método “Cone Ratio” e o Intervalo de Confiança

O método “Cone Ratio” (CHARNES *et al.*, 1990) considera o conceito de regiões de segurança (RS) desenvolvido por Thompson *et al.* (1990), e permite especificar restrições (relação entre os pesos) do tipo:

$$k_{iw} \leq \frac{V_i}{V_g} \leq k_{it} \quad (i \neq g) \text{ e/ou } k_{rw} \leq \frac{U_r}{U_o} \leq k_{rt} \quad (r \neq o) \quad (12)$$

em que V_i e V_g representa os pesos das entradas e U_r e U_o o das saídas no modelo AED, respectivamente. Os valores k_{iw} , k_{it} , k_{rw} e k_{rt} , são tais que podem incorporar a opinião do decisor ou outra informação disponível. O nome (RS) vem destas restrições, que limitam a região dos pesos para uma área especial (compatibilidade). Como será visto abaixo (no caso em que $r = 1$), no método aqui proposto os pesos das entradas são determinados de forma objetiva, usando-se os limites dos intervalos de confiança em um modelo de Regressão Linear Múltipla.

Assim, para estabelecer restrições do tipo “Cone Ratio” (12) a partir dos intervalos de confiança da regressão linear múltipla no caso em que $r = 1$, consideram-se as relações entre os limites inferiores e superiores, respectivamente, dos intervalos de confiança de todas as entradas. No caso de m entradas teremos $2C_m^2$ relações da forma

$(\hat{\beta}_i - t \cdot S(\hat{\beta}_i)) / (\hat{\beta}_g - t \cdot S(\hat{\beta}_g))$ e $(\hat{\beta}_i + t \cdot S(\hat{\beta}_i)) / (\hat{\beta}_g + t \cdot S(\hat{\beta}_g))$, considerando cada par de limites. Denominando por k_{iw} e k_{it} os valores mínimos e máximos encontrados, pode-se estabelecer, para os pesos correspondentes, razões do tipo $k_{iw} \leq \frac{V_i}{V_g} \leq k_{it}$, onde $k_{iw} =$

$\min(LL_1/LL_2; UL_1/UL_2); k_{it} = \max(LL_1/LL_2; UL_1/UL_2)$ (LL e UL os limites inferior e superior dos intervalos de confiança de cada variável no modelo de regressão. Cada razão pode ser transformada em duas restrições, gerando um total de $2C_m^2$ desigualdades do tipo:

$$V_i - k_{iw} V_g \geq 0; -V_i + k_{it+} V_g \geq 0. \quad (13)$$

Pode-se assim especificar as restrições dos pesos da forma $W(v, u) \geq 0$, em que $W(v, u) \geq 0$ é o vetor de pesos das entradas e $u = (U)$ o vetor de um elemento representando a saída do modelo. Assim, W é formada com linhas $(1 - k_{iw} \ 0)$, $(-1 \ k_{it} \ 0)$ e $(0 \ 0 \ 1)$, correspondentes nas restrições aos pesos e o vetor unitário acima.

4.6 Materiais e Métodos

A partir dos trabalhos de SENGUPTA (1990) e FRIEDMAN e SINUANY-STERN (1997), citados na introdução, foi desenvolvido um procedimento para especificar os limites do método de WONG E BEASLEY (1990) usando pesos canônicos (item 4.4) e intervalos de confiança (item 4.5) para as restrições do método “Cone Ratio”. Uma aplicação e o procedimento de obtenção dos limites de Wong e Beasley são apresentados nos artigos anexos (1) e (2), respectivamente. A comparação entre os dois métodos foi discutida no artigo anexo (3) em uma aplicação a uma amostra de hospitais, em que a regressão linear foi o modelo utilizado.

A base de dados necessária para a aplicação (Artigo 1 e 2-anexos) foi formada a partir das interações realizadas pelos hospitais do SUS das capitais do país em 2000, obtidas do Sistema de Informações Hospitalares do SUS, Datasus/MS (Tabela 1 - Artigo 1). A AED foi realizada no programa *Frontier Analyst Professional* (BANXIA, 1988). Os valores dos pesos canônicos, a correlação canônica, os intervalos de restrição dos pesos e os demais procedimentos estatísticos foram gerados no programa *Statistica* (STATSOFT INC, 2001) e no Microsoft Excel.

Para avaliar comparativamente a eficiência dos hospitais do SUS nas capitais brasileiras, foram analisadas as suas internações na categoria “clínica médica”, que incluem, além das internações na clínica médica propriamente dita, as de outras sub-especialidades clínicas como: *cardiologia*, *endocrinologia*, *oncologia clínica*, *infectologia* e *pneumologia*. As seguintes variáveis foram utilizadas:

- Entradas: taxa de mortalidade (*mortalidade*); tempo médio de permanência no hospital (*média de permanência*);
- Saídas: percentuais de internação relativos aos três capítulos CID com maior percentual de mortalidade, respectivamente: *neoplasias*; doenças infecciosas e parasitárias (*DIP*) e doenças do aparelho circulatório (*circulatório*); valor médio pago pela Autorização de Internação Hospitalar (*AIH médio*).

A base de dados para a segunda aplicação (Artigo 3 - anexo) foi formada a partir das internações na clínica cirúrgica de 20 hospitais públicos da cidade do Rio de Janeiro em 2005. Naquele ano, esses hospitais foram responsáveis por 14.593 internações referentes a doenças de média e baixa complexidade da sub-especialidade “cirurgia gastrointestinal e de órgãos anexos”. Aqui também a AED foi realizada nos programas *Frontier Analyst Professional* (BANXIA, 1988) e EMS (HOLGER SCHEEL, 2000) para os limites de restrição dos pesos do método desenvolvido por WONG e BEASLEY (1990) e o método “Cone Ratio” (CHARNES *et al*, 1990), respectivamente. Os valores das estimativas dos coeficientes das variáveis (entradas), o coeficiente de correlação, os intervalos de restrição dos coeficientes das variáveis e os demais procedimentos estatísticos também foram gerados pelo *Statistica*, utilizando os dados da Tabela 1 desse artigo.

O modelo utilizou como entradas as variáveis: número de leitos cirúrgicos, (*número de leitos*) e dias de permanência no hospital (*permanência*) e, como saída, o

número de internações de doenças de média e baixa complexidade (*internações*) da sub especialidade cirurgia gastrointestinal e de órgãos anexos. Primeiramente, uma análise de regressão foi usada e as estimativas dos coeficientes foram usadas para identificar os intervalos de restrição dos pesos dessas variáveis (entradas), necessários para a primeira AED. Uma vez especificados os limites c_i, d_i , o modelo CRS foi construído, introduzindo-se a restrição dos pesos usando a proporção virtual. A seguir, as restrições dos pesos pelo “Cone Ratio” foram geradas a partir dos intervalos de confiança das estimativas padronizadas dos coeficientes das entradas, e uma nova AED foi obtida. Isto permitiu a construção de escores de eficiência para cada método, tendo sido os hospitais, então, classificados e analisados em função desse escore.

5. Resultados

Os resultados estão detalhados em três artigos científicos anexos:

(1) DATA ENVELOPMENT ANALYSIS FOR EVALUATING PUBLIC HOSPITALS IN BRASILIAN STATE CAPITALS (Revista de Saúde Pública, v.41, n.3 (Jun), 2007 - Finalista do Prêmio de Incentivo em CIÊNCIA E TECNOLOGIA para o SUS - 2008)

(2) CANONICAL CORRELATION FOR THE DEFINITION OF WEIGHT RESTRICTIONS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (submetido ao Annals of Operations Research em 02/10/2009)

(3) DEFINING WEIGHT RESTRICTION LIMITS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS THROUGH LINEAR REGRESSION WITH AN APPLICATION IN HOSPITAL EVALUATION (submetido ao Central European Journal of Operations Research em 28/12/2009)

Como mencionado, o objetivo do primeiro desses (GONÇALVES, *et al.*, 2007) foi aplicar a técnica de Análise Envoltória de Dados na avaliação de hospitais do SUS das capitais brasileiras e usar na definição dos limites dos intervalos de WONG E BEASLEY (1990), para todas as DMUs, os pesos canônicos. Aqui, os pesos canônicos, coerentes com os preceitos da AED (aumento de *entradas* devem refletir em aumento de *saídas* (Artigo 1 - Tabela 2), forneceram, com os intervalos considerados, uma classificação em que as grandes capitais aparecem fora da fronteira de eficiência (artigo 1 - Tabela 3). Destacaram-se as doenças do aparelho circulatório, com 23,6% das internações nos hospitais estudados. Das 27 capitais, quatro alcançaram 100% de eficiência (Palmas, Macapá, Teresina e Goiânia).

No segundo trabalho, o propósito foi desenvolver os fundamentos teóricos para especificar os limites dos intervalos de WONG E BEASLEY (1990) para todas as DMUs (item 4.4). Nesse trabalho também foi observado que a variabilidade dos pesos

virtuais proporcionais, após a aplicação da AED no modelo restrito é bem menor que aquelas do modelo irrestrito (Artigo 2 - Figura 1). Por exemplo, no modelo irrestrito a variação dos pesos da taxa de mortalidade e o tempo médio de permanência foi de 0 - 100%, enquanto no modelo restrito as variações situaram-se na faixa de 16-26% e 72 - 84%. Adicionalmente, foram construídos intervalos de confiança para os escores de eficiência seguindo-se a metodologia proposta por SIMAR e WILSON (1998) (Tabela 2).

No terceiro, a idéia foi desenvolver outro procedimento de restrição aos pesos e realizar uma comparação com o procedimento inicial aplicado ao método Wong e Beasley. Como discutido, utilizou-se o método do “Cone Ratio” (CHARNES, *et al.*, 1990) e os dados de internações na clínica cirúrgica de 20 hospitais públicos da cidade do Rio de Janeiro em 2005. Os resultados estão na tabela 3 desse artigo e indicam que houve pouca diferença na classificação dos hospitais, considerando-se os dois procedimentos de restrição aos pesos.

Adicionalmente, outros artigos envolvendo a AED foram produzidos no decorrer da tese:

1. Avaliação de Desempenho de um Programa de Saúde Bucal por meio da Análise Envoltória de Dados, publicado nos *Anais do XX Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica e II Congresso Brasileiro de Engenharia Clínica* (Outubro/2006).
2. Limites de Restrição dos Pesos do Método de Wong e Beasley em Análise Envoltória de Dados, publicado nos *Anais do XXI Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, IV Congresso de Engenharia Clínica e VI Fórum de Tecnologia Aplicada à Saúde* (Novembro/2008).

No primeiro (GONÇALVES *et al.*, 2006) o objetivo principal foi avaliar a eficiência e a cobertura das Regiões Administrativas (RAs) do Município do Rio de Janeiro com respeito às ações básicas em Odontologia, usando a Análise Envoltória de Dados. Conseguiu-se mostrar, por meio dos resultados de eficiência e cobertura das unidades (RAs), que embora algumas ultrapassem a meta de produção, a maioria não aproveita bem os seus recursos. Esse artigo introduz, ainda, um novo conceito de cobertura, o qual leva em conta também a renda da população alvo, o que permite uma melhor explicação da demanda por serviços públicos de saúde em determinada região. Entretanto, a maior inovação consistiu em integrar dois indicadores, normalmente utilizados separadamente por órgãos como o Ministério da Saúde e Secretarias Municipais de Saúde: cobertura e produtividade. Os resultados desta avaliação serviram como apoio aos gestores do Programa de Saúde Bucal da Secretaria Municipal de Saúde do Rio de Janeiro, auxiliando nas decisões de economia de recursos, remanejamento de mão-de-obra e cobertura da população alvo nos padrões exigidos.

O segundo desses artigos adicionais (GONÇALVES *et al.*, 2008) teve como objetivo explorar introdutoriamente o uso dos coeficientes padronizados da Regressão Linear Múltipla na especificação dos limites do método de restrição aos pesos em AED, estabelecidos por WONG e BEASLEY (1990). Esses coeficientes foram usados para identificar os intervalos de restrição dos pesos das entradas para a AED. Assim, os intervalos de restrição foram obtidos a partir das próprias características (valores) das variáveis.

6. Discussão

Neste trabalho, buscou-se uma forma objetiva para especificar limites de restrição aos pesos na AED que levasse em conta a informação estatística das variáveis em estudo, e, ao mesmo tempo, tentar obter desigualdades compatíveis para a aplicação destas restrições a todas as DMUs (8). Para isto, foram utilizados os modelos de Análise de Correlação Canônica e Regressão Linear Múltipla.

O uso da ACC para introduzir restrições aos pesos na AED para o método de Wong e Beasley e da RLM (intervalo de confiança) para o “Cone Ratio”, até onde pôde ser constatado é um procedimento original. Verificou-se que esta estratégia de restrição construída conforme (7), evita a inviabilidade para a AED. Assim, SARRICO (2004) propõe, para o uso de restrição proporcional virtual para todas as unidades, que os limites sejam cuidadosamente escolhidos para evitar a inviabilidade (limites não muito próximos), mostrando que, se os limites forem arbitrados sem critério, incoerências matemáticas podem surgir nas restrições, tornando o problema inviável (Artigo 2). Os testes para de viabilidade dos pesos aplicados ao modelo AED já são conhecidos (LINS, 2007b).

Comparando-se os procedimentos descritos em 4.4 e 4.5 para a especificação dos limites dos pesos, verificou-se que, relativamente à ACC, os limites são escolhidos por (7), usando o método de restrição de Wong e Beasley, enquanto, no “Cone Ratio” obtém-se as restrições, dividindo-se os limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança para obter k_w e k_{it} de (12), valor mínimo e valor máximo, respectivamente.

Também foi mostrado que os pesos da AED obtidos com estas restrições variam menos do que aqueles do modelo original da Análise Envoltória de Dados (Artigo 2). O procedimento foi utilizado para múltiplas entradas e saídas e para o caso particular de apenas uma saída (Artigo 3), sendo comparados os métodos de Wong e Beasley e

“Cone Ratio”, com resultados similares. No caso em que a ACC é utilizada para a definição dos pesos, deve ser lembrado que ela determina um conjunto de pesos para todas as unidades, enquanto a AED estabelece vetores de pesos diferentes para cada unidade. Como discutido, a solução do problema original (que permite a total flexibilidade dos pesos) pode gerar pesos muito diferentes para uma mesma entrada ou saída, prejudicando a formação dos escores de eficiência (SAATI, 2005). Essa flexibilidade também torna problemática a comparação entre DMUs em uma base comum (MAKUI, 2008). Também como visto (Artigo 2), a variação dos pesos virtuais proporcionais apresenta uma variabilidade menor entre as unidades, e, conseqüentemente, também entre os vetores de pesos obtidos a partir de restrições desenvolvidas em 4.4. Assim, uma das vantagens do procedimento proposto é estabelecer *uma base mais próxima de pesos, sem descaracterizar a AED*. É importante também ressaltar que os pesos obtidos desta forma levam em conta a importância estatística, para a AED, de cada variável, isto é, as entradas e saídas consideradas são aquelas estatisticamente significantes e importantes na formação dos escores de eficiência.

A escolha da ACC (correlação linear entre as variáveis canônicas) para selecionar as variáveis para a AED e como procedimento para especificar os limites de WONG e BEASLEY (1990) justifica-se na medida em que o modelo CRS é de “retorno constante”, isto é, aumentos proporcionais das entradas devem refletir-se em aumentos proporcionais para as saídas para que cada DMU mantenha sua eficiência. Já relativamente ao segundo método estudado (Artigo 3) a especificação da relação dos pesos do método “Cone Ratio” justifica-se pela sua própria característica de construção, que incorpora o conceito de Região de Segurança (RS) desenvolvido por THOMPSON (1990) para evitar a inviabilidade (12) (KORNBLUTH, 1991). O conceito de RS, aqui,

vem da restrição $k_{iw} \leq \frac{V_i}{V_g} \leq k_{it}$ (item 4.5) que utiliza as relações ordenadas entre os limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança. Nesta situação, a razão dos pesos da AED é construída a partir de ICs que não contém zero, pois, pela lógica discutida anteriormente, variáveis com coeficientes “zero” seriam eliminadas da análise, uma conclusão que também é válida para o método de Wong e Beasley.

Na comparação entre os dois métodos, observaram-se resultados similares (Artigo 3 - Tabela 3), notando-se que estes guardam uma relação de equivalência (GONÇALVES, 2001b). Isto é, resolvendo-se diretamente as desigualdades de Wong e Beasley (3) com os limites obtidos por (10) para todas as entradas, chega-se às desigualdades (13) do “Cone Ratio”.

A avaliação dos hospitais baseada nos modelos desenvolvidos forneceu resultados interessantes sobre o sistema de saúde estudado. No Artigo 3, observou-se que as unidades que apresentaram um bom desempenho, em geral, foram os hospitais com cirurgia eletiva e clientela adscrita bem delimitada (como os três primeiros na Tabela 3 desse artigo). Por exemplo, o hospital classificado em primeiro lugar (com 100% de eficiência tanto na classificação Wong e Beasley quanto na escala “Cone Ratio”) tem sido tradicionalmente considerado como um hospital cirúrgico de referência na cidade. Por outro lado, os hospitais com maior número de cirurgias de emergência localizaram-se na parte inferior da escala de classificação, o que é coerente com a maior complexidade desses pacientes. Também se pode notar nesta tabela que as maiores diferenças na pontuação entre Wong e Beasley e “Cone Ratio” surgiram para os hospitais no topo da classificação (2ª, 3ª e 5ª - 8ª posições). No entanto, a razão para essas discrepâncias não é totalmente clara e deve ser mais investigada. Nos artigos 1 e 2, que avaliaram as capitais brasileiras em relação à clínica médica dos hospitais do SUS, foi possível constatar que 16 capitais operavam com menos de 75% de eficiência

relativa. As quatro cidades identificadas como “100% de eficiência” (Palmas, Macapá, Teresina, e Goiânia) não se encontram entre os estados de maior Produto Interno Bruto (PIB) per capita ou nos quais se localizam os grandes centros tecnológicos e educacionais do País. Isso indica que, para os municípios estudados, ganhos de desempenhos expressivos são ainda possíveis com os insumos existentes.

Os vários tipos de restrições de peso propostos na literatura AED podem ser classificados em três (Allen *et al.*, 1997), quais sejam: regiões de segurança tipo I (proposta por Thompson *et al.* (1986), do tipo Wong e Beasley e “Cone Ratio”), regiões de segurança tipo II (proposta por Thompson *et al.* (1990) e chamada freqüentemente *regiões de segurança do cone*) e restrições de peso absoluto (primeiro proposto por Dyson e Thanassoulis (1988)), na qual impõem-se limites numéricos nos pesos diretamente). No entanto, em todos esses casos, os alvos estimados pelo modelo na ótica das entradas podem não conduzir uma DMU_{j_0} ineficiente para exatamente 100% de eficiência. Apesar disso, esses valores são próximos ao alvo, o que, assim, não prejudica o desenvolvimento de modelos coerentes (ALLEN *et al.*, 1997, LINS *et al.*, 2007a).

7. Conclusões e futuras direções

Como visto ao longo do texto, os procedimentos discutidos apresentam vantagens que podem ser sintetizadas como:

- (a) os parâmetros que determinam as restrições nos dois procedimentos são escolhidos de forma coerente para a AED (aumento das entradas devem refletir aumento de saídas);
- (b) esses parâmetros são escolhidos estatisticamente e não de forma subjetiva, o que poderia gerar equações inconsistentes para o modelo de Wong e Beasley;
- (c) uma vez estabelecidas as restrições e os novos pesos obtidos para a AED, estes estabelecem uma base mais uniforme para a formação dos escores (gerados a partir de intervalos mais homogêneos – Artigo 2);
- (d) o modelo AED tende a ser viável conforme os limites (7) nas desigualdades (8) e

escolhidos como no item 4.5 para as razões $k_{iw} \leq \frac{V_i}{V_g} \leq k_{it}$.

Outra vantagem dos métodos apresentados é que as formas propostas de especificação de limites de pesos, e conseqüentemente a escolha de variáveis para a AED, permitem a um tomador de decisão selecionar variáveis mais adequadas para problema, tendo em vista que estas também serão submetidas a um procedimento de verificação estatística. Isto é, o tomador de decisão é auxiliado pelo conhecimento agregado a partir dos estudos necessários para gerar os limites, e o julgamento sobre o peso das entradas - saídas é feito de forma mais objetiva. Por outro lado, talvez uma desvantagem, seria, em determinadas situações, a impossibilidade de encontrar variáveis estatisticamente coerentes para a AED.

A AED é uma metodologia direcionada para fronteiras (ajuste pelo topo), isto é, escolhe o conjunto de pesos que atribui o mais alto escore de eficiência possível para

cada unidade que está sendo avaliada, o que a diferencia da ACC e da RLM, que geram estimativas baseadas nos valores médios das variáveis, de acordo com uma função especificada. Assim, estudos futuros seriam necessários para especificar outras relações do método estatístico e o modelo AED. Enfim, pode ser afirmado que os pesos assim obtidos são tecnicamente mais corretos para a AED, e que, conseqüentemente, produzirão escores de eficiência melhores.

8. Referências Bibliográficas

- ALLEN, R., ATHANASSOPOULOS, A.D., DYSON, R.G., *et al.*, 1997, “Weights restrictions and value judgments in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions”, *Annals of Operations Research*, v. 73, n.0 (Out), pp. 13-34.
- BANKER, R.D., CHARNES, A., COOPER W.W., 1984, “Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis”, *Management Science*, v. 30, n.9 (Set), pp.1078-1092.
- BANXIA HOLDINGS. Frontier Analyst Professional, 1988. Disponível em: <<http://www.banxia.com/frontier/index.html>>. Acesso em: 27 out. 2009
- BOUROUCHE, J.M., SAPORTA G., 1980, *L'Analyse des Données*. France-Paris, Presses Universitaires de France.
- CHANG, S.Y., CHEN, T.H., 2007, “A simple approach to adjust factor weights in Data Envelopment Analysis”, *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, v.24, n.2, pp. 120-127.
- CHARNES, A., COOPER, W.W. RHODES, E., 1978, “Measuring the efficiency of decision-making units”, *European Journal of Operational Research*, v.2, n.6 (Nov), pp. 429-444.
- CHARNES, A., COOPER, W.W., HUANG Z.M, *et al.*, 1990. “Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks”, *Journal of Econometrics*, v.46, n.1(Fev), pp. 73-91.
- CHILINGERIAN, J.A.,1996, “Exploring why some physicians` hospital practices are more efficient: taking DEA inside the hospital”. In: Charnes, A., Cooper, W., Lewin, A.Y., Seiford, L.M. (eds), *Data Envelopment Analysis:Theory*,

Methodology and Applications, 2 ed., chapter 9, Norwell, Massachusetts 02061, USA, Kluwer Academia Publishers.

DEXTER, F., O' NEILL., 2004, "Data Envelopment Analysis to determine by how much hospitals can increase elective inpatient surgical workload for each specialty", *Anesthesia & Analgesia*, v.99, n.5 (Nov), pp. 1492-1500.

DYSON, R.G., THANASSOULIS, E., 1988, "Reducing weight flexibility in data envelopment analysis", *Journal of the Operational Research Society*, v.39, n.6 (Jun), pp. 563-576.

FELDER, S., SCHMITT, H., 2004. "Data Envelopment Analysis based bonus payments", *The European Journal of Health Economics*, v. 5, n.4 (Dez), pp. 357-363.

FRIEDMAN, L., SINUANY-STERM, Z., 1997, "Scaling units via the canonical correlation analysis in the AED context", *European Journal of Operational Research*, v. 100, n.3 (Ago), pp. 629-637.

FRIEDMAN, L., SINUANY-STERM, Z., 1998, "Combining ranking scales and selecting variables in the DEA context: The case of Industrial Branches", *Computers and Operations Resesearch*, v.25, n.9, pp. 781 – 791.

GONÇALVES, A.C., NORONHA, C.P., 2001a, "Avaliando a eficiência dos hospitais gerais do SUS através da metodologia da análise envoltória de dados – DEA", *Revista Saúde em Foco/ Informe Epidemiológico em Saúde Coletiva*, n. 22 (Dez), pp. 93 – 105.

GONÇALVES, A.C., 2001b, *Um Estudo de Eficiência e Cobertura das Ações Básicas do Programa de Saúde Bucal da Prefeitura da cidade do Rio de Janeiro*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro,RJ, Brasil.

- GONÇALVES, A.C., ALMEIDA, R.M.V.R., GOMES, E.G., 2006., “Avaliação de desempenho de um programa de saúde bucal por meio da análise envoltória de dados”. In: Anais do XX Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, pp. 495 - 498 , São Pedro- São Paulo, Out.
- GONÇALVES, A.C., NORONHA, C.P., LINS, M.P.E., *et al.*, 2007, “Data envelopment analysis for evaluating public hospitals in Brazilian state capitals”, *Revista de Saúde Pública*, v.41, n.3 (Jun), pp. 427-435.
- GONÇALVES, A.C., ALMEIDA, R.M.V.R., SAMANEZ, C.P., 2008, “Limites de Restrição dos pesos do método de Wong e Beasley em Análise Envoltória de dados” In: Anais do XXI Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, pp. 597 - 600 , Salvador- Bahia, Nov.
- GUJARATI DN, *Econometria Básica*. 3ª ed. São Paulo, Pearson Education do Brasil, 2000.
- HALME, M, JORO T, KORHONEN P., *et al.*, 1999, “A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis”, *Management Science*, v.45, n.1 (Jan), pp. 103-115.
- HOLGER SCHEEL. Ems: Efficiency Measurement System User`s Manual, Versão 1.3, 2000. Disponível em: <[http:// www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/ems/](http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/ems/)> Acesso em: 12 mar. 2009.
- KIRIGIA, J.M., EMROUZNEJAD, A., SAMBO, L.G., *et al.*, 2004, “Using Data Envelopment Analysis to measure the technical efficiency of public health centers in Kenya”, *Journal of Medical System*, v.28, n.2 (Abr), pp. 155-166.
- KORNBLUTH, J.S.H., 1991, Analysing policy effectiveness using cone restricted data envelopment analysis, *Journal of the Operational Research Society*, v. 42, n.12, pp. 1097-1104.

- KRZANOWSKI W J, *An Introduction to Statistical Modelling*. 1ª ed. London, Hodder Arnold, 1988.
- LINS, M.P.E, L ÂNGULO, MEZA., 2000, *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de apoio à decisão*. 1 ed. Rio de Janeiro, Editora COPPE/UFRJ.
- LINS, M.P.E., GONÇALVES, A.C., GOMES E.G., *et al.*, 2004, “Performance assessment of dental clinics though PC-oriented Data Envelopment Analysis “, In: Oliveira, M.J.F. (ed), *Accessibility and Quality of Health Services*, 28 ed., chapter 8, Frankfurt am Main, Berlin, Bern, Bruxelles, New York, Oxford, Wien, Peter Lang Frankfurt.
- LINS, M.P.E, SOLLERO, M.K.V., CALÔBA, G..M., *et al.*, 2007a, “Integrating the regulatory and utility firm perspectives, when measuring the efficiency of electricity distribution”, *European Journal of Operational Research*, v.181, n.3 (Set), pp. 1413-1424.
- LINS, M.P.E., SILVA, ACM., LOVELL, C.A.K., 2007b, “Avoiding infeasibility in DEA models with weight restrictions”, *European Journal of Operational Research*, v.181, n.2 (Set), pp. 956-966.
- MAKUI, A., ALINEZHAD, A., MAVI, R.K., *et al.*, 2008, “A Goal Programming Method for Finding Common Weights in DEA with an Improved Discriminating Power for Efficiency”, *Journal of Industrial and Systems Engineering*, v.1, n.4, pp. 293-303.
- MARINHO, A., 1998, “ Estudo de eficiência em hospitais públicos e privados com a geração de rankings”, *Revista de Administração Pública*, v.32, n.6 (Nov/Dez), pp.145-158.

- RETZLAFF-ROBERTS, D., CHANG, C.F., RUBIN, R.M., 2004, "Technical efficiency in the use of health care resources: a comparison of OECD countries", *Health Policy*, v. 69, n.1(Jul), pp. 55-72.
- ROLL. Y., COOK, W.D., GOLANY, B., 1991, "Controlling factor weights in data envelopment analysis", *IIE Transactions*, v.23, n.1, pp. 2-9.
- SAATI, S., MEMARIANI, A., 2005, "Reducing weight flexibility in fuzzy DEA", *Applied Mathematics and Computation*, v.161, n.2 (Fev), pp. 611-622.
- SARRICO, C.S; DYSON, R.G., 2004, "Restricting virtual weights in Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, v.159, n.1 (Nov), pp.17-34.
- SENGUPTA, J.K; 1990, "Tests of efficiency in Data Envelopment Analysis", *Computers and Operations Resesearch*, v.17, n.2, pp, 123-132.
- SIMAR, L., WILSON P.W., 1998, "Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to bootstrap in Noparametric frontier Models", *Management Science*,v.44, n.1 (Jan), pp.49-61.
- STATSOFT INC. Statistica Manual version 6. Oklahoma USA, 2001. Disponível em: <<http://www.statsoft.com> > Acesso em: 12 jun. 2009.
- THOMPSON, R.G., SINGLETON, F.D.,THRALL RM., *et al.*, 1986, "Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas", *Interfaces*, v.16, n.6 (Nov-Dez), pp. 35-49.
- THOMPSON, R.G.,LANGEMEIER, L.N.,LEE., *et al.*, 1990,"The Role of Multiplier Bouds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming", *Journal of Econometrics*, v.46, pp.93-108.
- VALDMANIS, V., KUMANARAYAKE, L., LERTIENDUMRONG, J., 2004, "Capacity in Thai public hospitals and the production of care for poor and nonpoor patients", *Health Services Research*",v. 39, n.6pt2, pp.2117-2134.

- WANG, Y.M., LUO, Y., LIANG, L., 2009, "Ranking decision making units by imposing a minimum weight restriction in the data envelopment analysis", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v.223, n.1 (Jan), pp. 469-484.
- WONG, Y.H.B; BEASLEY, T.E., 1990, "Restricting weight flexibility in DEA", *Journal of the Operational Research Society*, v.41, n.9, pp. 829-835.

9. Anexos

Glossário

Artigo (1) DATA ENVELOPMENT ANALYSIS FOR EVALUATING PUBLIC HOSPITALS IN BRASILIAN STATE CAPITALS (Journal of Public Health, v.41, n.3 (Jun), São Paulo - 2007 - Finalista do Prêmio de Incentivo em CIÊNCIA E TECNOLOGIA para o *SUS* - 2008)

Artigo (2) CANONICAL CORRELATION ANALYSIS IN THE DEFINITION OF WEIGHT RESTRICTION LIMITS FOR DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (submetido ao Annals of Operations Research em 02/10/2009)

Artigo (3) DEFINING WEIGHT RESTRICTION LIMITS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS THROUGH LINEAR REGRESSION WITH AN APPLICATION IN HOSPITAL EVALUATION (submetido ao Central European Journal of Operational Research em 28/12/2009)

Glossário

Análise de Componentes Principais – Método estatístico multivariado que estuda a relação de um conjunto de variáveis através de combinações lineares que sejam não correlacionadas na ordem de sua importância, e que descreva a variação nos dados.

Análise de Correlação Canônica (ACC) – Método estatístico multivariado que estuda a associação entre dois grupos de variáveis (entradas e saídas) através de combinações lineares destes conjuntos.

Análise Envoltória de Dados (AED) – A AED é uma técnica multivariada para monitoramento de produtividade de unidades tomadoras de decisão (DMUs), que fornece dados quantitativos sobre possíveis direções para a melhoria do “status quo” das unidades, quando ineficientes. Em particular, a AED é uma técnica não - paramétrica que permite comparar dados de entrada e saída sem suposições de ordem estatística.

Deficiência empírica – “Deficiência” do problema da AED, que na busca da solução ótima pode atribuir peso “zero” para alguma(s) variáveis de entradas e/ou saídas.

Entradas e saídas – Conjunto de variáveis associadas a cada DMU.

Estimador de um parâmetro – é toda função de elementos de amostra oriunda dessa população, que mantém para com o parâmetro uma certa relação.

Estimativa – Valor que o estimador assume para dada amostra.

Estrutura de variáveis – Conjunto de entradas e saídas.

Flexibilidade total dos pesos – pesos sem restrição.

Fronteira CRS (Fronteira eficiente) – formada pelo conjunto de todas as unidades (DMUs) eficientes (escore de eficiência igual a 100%).

Intervalo de confiança – Intervalo aleatório que contém a quantidade de interesse com probabilidade fixada.

Intervalo de variação dos pesos – Quando se atribui limites inferiores e superiores onde os mesmos devem variar ou suas proporções em cada conjunto de entradas e saídas.

Máximo empírico de eficiência (solução ótima – escore de eficiência - eficiência) – Melhor escore de eficiência encontrado, para uma DMU, em um problema de AED.

Medida empírica – baseada nas observações (entradas e saídas).

Medida não – paramétrica- Aquela que não obedece a um modelo estatístico pré especificado.

Método de restrições aos pesos de Wong e Beasley e Cone Ratio – Formas de limitar a variação dos pesos na AED.

Modelo irrestrito (sem restrição aos pesos) – Problema de AED onde os pesos de cada variável não são limitados para encontrar a solução ótima de cada DMU.

Ótica da entrada – Busca da solução ótima de um problema de AED pela minimização das entradas.

Perito ou tomador de decisão – Aquele que é expertise em determinado assunto que esta sendo alvo da aplicação da AED.

Pesos – Importância (quantidade) relativa das entradas e saídas, que é estimada na AED pela busca da solução ótima, que formam os escores de eficiência de cada DMU.

Pesos canônicos – Coeficientes estimados pela ACC (importância estatística das entradas e saídas pela ACC).

Problema Dual – É um outro PPL associado a um PPL de modo que o par de problemas podem ser atribuídas várias características e propriedades notáveis.

Problema de Otimização – É um PPL que busca a melhor solução (minimizando entradas) para que uma determinada DMU atinja o máximo de eficiência.

Problema de Programação Linear (PPL) – Problema de otimização para calcular o escore de eficiência máximo possível de cada DMU em um problema de AED.

Programação Linear Multi – Objetivo – É um problema de otimização que envolve a maximização/minimização de várias funções ao mesmo tempo.

Referência teórica ou conceitual – O que se baseia em algum conceito pre-estabelecido (modelo estatístico).

Região comum – Conjunto de restrições comum a todas as DMUs de um problema de AED.

Regressão Linear Múltipla – Um caso particular da ACC quando se trata de apenas uma saída.

Restrições aos pesos – Conjunto de desigualdades/ igualdades de um problema de AED.

Unidades ineficientes – Aquelas que não atingiram a eficiência de 100%.

Unidades tomadoras de decisão (DMUs) – Unidades que realizam tarefas semelhantes (DMUs homogêneas).