UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Primeira Avaliação de Probabilidade e Estatística **13-10-2016**

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa. Resolver as questões nos espaços apropriados.

1. Entre os filmes em DVD à disposição do público em uma locadora:
   - 58% deles são dramas ou são filmes antigos (isto é, anteriores a 1980);
   - 65% deles são dramas ou são filmes europeus;
   - 70% deles são filmes antigos ou são filmes europeus;

   Há independência entre os três atributos: A= ser um drama, B = ser antigo e C = ser europeu. Se alguém escolher ao acaso um filme entre os disponíveis na locadora, qual a probabilidade de que ele:

   (a) Apresente cada um dos atributos: P(A), P(B) e P(C)?

   (b) Seja antigo e não europeu?

   (c) Possua **pelo menos** um dos três atributos acima citados?

2. Um supermercado faz a seguinte promoção: o cliente, ao passar pelo caixa, lança um dado. Se sair face 6 tem um desconto de 30% sobre o total de sua conta. Se sair face 5 o desconto é de 20%. Se sair face 4 o desconto é de 10% e se ocorrerem faces 1, 2 ou 3, o desconto é de 5%.

   (a) Encontre a função de probabilidade do desconto concedido.

   (b) Calcule o desconto médio concedido.

   (c) Calcule a probabilidade de que, num grupo de 5 clientes, pelo menos dois consigam um desconto maior que 10%.

3. A distribuição do peso, de uma certa população de pessoas, pode ser modelada como uma v.a. Normal com média 75 Kg e desvio padrão de 7 Kg.

   (a) Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso desta população vir a pesar entre 74 e 77 Kg;

   (b) Uma pessoa é considerada obesa quando seu peso está na faixa dos 3% mais pesados da população. Qual o menor valor limite de peso para um indivíduo ser classificado como obeso?

   (c) Agora, X é uma v.a. Normal com média μ e variância σ^2. Explique, usando mudança de variável em integração, por que:

   $$P(a < X < b) = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

4. O número de divórcios por indivíduo do sexo masculino adulto, em certa comunidade, foi modelado pela variável aleatória D, cuja função de probabilidade é tal que: P(D=0) = 0,5; P(D=1)=0,4 e P(D=2)=P(D=3)=0,05.

   As idades desses indivíduos foram classificadas em A="$\leq$ 25 anos"; B="entre 25 e 40 anos"; C="$\geq$ 40 anos". Sabe-se ainda que: P(D=1 | B)=0,1; P(A)=0,35; P(B)=0,5; P(C)=0,15; e que a distribuição conjunta de D e da idade (I) é parcialmente dada por

I \ D	0	1	2	3
A	0			
B			0	0
C		0		

   (a) Completar a tabela da distribuição conjunta.

   (b) São essas variáveis aleatórias independentes? Por quê?

   (c) Calcular a probabilidade condicional de um indivíduo aleatoriamente escolhido ter dois divórcios sabendo que ele está na classe B;

   (d) Calcular a probabilidade condicional de um indivíduo aleatoriamente escolhido ter dois divórcios sabendo que ele está na classe C.

Boa prova!

- **Soluções**

1. Sejam A = "drama", B = "antigo" e C = "europeu".
   Sejam também: x= P(A), y = P(B) e z = P(C). Então temos o sistema de equações:

$$x + y - xy = 0,58 \tag{1}$$
$$x + z - xz = 0,65 \tag{2}$$
$$y + z - yz = 0,70 \tag{3}$$

   (a) De (1) conclui-se que $x = \frac{0,58-y}{1-y}$, e de (3) conclui-se que $z = \frac{0,7-y}{1-y}$. Substituindo em (2), obtemos

$$\frac{0,58-y}{1-y} + \frac{0,7-y}{1-y} - \frac{0,58-y}{1-y} \times \frac{0,7-y}{1-y} = 0,65$$

   de onde se deduz que $350y^2 - 700y + 224 = 0$. Essa equação admite as raízes $1,6$ e $0,4$. Entre elas apenas a segunda é viável, ou seja, y = 0,4, porque uma probabilidade não pode ser maior que 1. Complementando, obtemos $x = \frac{0,58-0,4}{1-0,4} = 0,3$ e $z = \frac{0,7-0,4}{1-0,4} = 0,5$. Assim, $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ e $P(C) = 0,5$.

   (b) $P(B \cap C^c) = y(1-z) = 0,4 \times (1-0,5) = 0,20$

   (c) $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - (1-x)(1-y)(1-z) = 1 - 0,7 \times 0,6 \times 0,5 = 0,79$

2. Seja X a variável aleatória que representa o desconto dado pelo supermecado.

   (a) A função de probabilidade $p(x)$ é dada por:

$$p(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } x = 0,05, \\ 1/6, & \text{se } x = 0,1, \\ 1/6, & \text{se } x = 0,2, \\ 1/6, & \text{se } x = 0,3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

   (b) O desconto médio concedido é dado por:

$$E(X) = 0,05 \times \frac{1}{2} + 0,1 \times \frac{1}{6} + 0,2 \times \frac{1}{6} + 0,3 \times \frac{1}{6} = 0,125.$$

   (c) Seja Y o número de clientes que conseguiriam um desconto maior que 10% num grupo de 5 clientes. Pela independência entre os clientes temos que $Y \sim$ Binomial $(5, p)$, para

$$p = P(X > 0,1) = P(X = 0,2) + P(X = 0,3) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

   Desejamos

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 - 5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0,539.$$

3. X=Peso de uma pessoa. $X \sim N(\mu = 75, \ \ \sigma^2 = 7^2)$

   (a) $P(74 < X < 77) = \Phi(\frac{77-75}{7}) - \Phi(\frac{74-75}{7}) = \Phi(0,29) - \Phi(-0,14) = \Phi(0,29) + \Phi(0,14) - 1 = 0,6141 + 0,5557 - 1 = 0,1698$.

   (b) Seja "Obs"o peso mínimo para uma pessoa ser qualificada como obesa. Assim, $P(X > Obs) = 0,03$. Ou $P(X < Obs) = \Phi(\frac{Obs-75}{7}) = 0,97$

$$\frac{Obs - 75}{7} = 1.88 \implies Obs = 1,88 \times 7 + 75 = 88,16$$

   .

   (c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Assim:

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

   Fazendo a mudança de variável $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ que corresponde a $dz = \frac{dx}{\sigma}$ teremos:

$$P(a < X < b) = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

4. Temos que

I \ D	0	1	2	3
A	0	c	d	e
B	a	b	0	0
C	b	0	f	g

(a) b=$P(D = 1 \cap B) = 0,1 \times 0,5 = 0,05$; Para que as marginais sejam respeitadas: a=0,45; c=0,35; d=e=0; f=g=0,05

(b) Nao. Veja $P(D = 2 \cap B) = 0 \neq P(D = 2) \times P(B)$

(c) P(D=2 | B) = 0

(d) P(D=2 | $C) = 0,05/0,15 = 1/3$