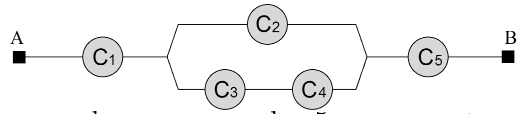
Probabilidade e Estatística

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justicativa.

1. O funcionamento do sistema ilustrado abaixo depende de 5 componentes: C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5. Cada um desses componentes tem probabilidade $0,1$ de estar defeituoso, independentemente dos demais; e o sistema irá funcionar apenas se houver pelo menos um caminho conectando os pontos A e B ao longo do qual nenhum componente esteja defeituoso.



   (a) Calcule a probabilidade de que pelo menos um dos 5 componentes esteja defeituoso.
   (b) Calcule a probabilidade desse sistema funcionar.
   (c) Calcule a probabilidade de que o componente C_3 esteja defeituoso, dado que o sistema está funcionando.

2. Uma loja vende em média 3 microcomputadores por dia. Admita que a demanda por este produto segue uma distribução de Poisson. Ao verificar o estoque, observa-se existirem 2 microcomputadores. Sabe-se que a nova remessa só chegará depois de alguns dias. Qual a probabilidade de que, no fim desse período, a loja não tenha deixado de atender, por falta de estoque, as pessoas que vierem comprar quando:

   (a) A nova remessa chega em 1 dia?
   (b) A nova remessa chega em 2 dias?

   Suponha agora que esta loja faz parte de uma rede composta por 4 lojas, e que há independência entre as demandas por computadores nas 4 lojas. Em cada uma das lojas há 2 computadores em estoque e a nova remessa chegará em 1 dia. O controlador geral do estoque receberá uma advertência se em pelo menos 2 dessas 4 lojas o estoque não for suficiente para atender a demanda.

   (c) Qual a probabilidade do controlador receber esta advertência?

3. O prazo adequado para a troca de um amortecedor novo de certa marca em automóveis sujeitos a uso contínuo e severo, pode ser considerado como uma variável aleatória contínua, medida em anos. Suponha que a função de densidade dessa variável é dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{1}{8}, & \text{se } 2 < x \leqslant 6 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Qual é a probabilidade de que, para um automóvel, sujeito as condições descritas acima, a vida útil do amortecedor esteja entre 1 e 3 anos de uso?
   (b) Qual é, em média, a vida útil dos amortecedores dessa marca?

4. Quando os consumidores abastecem seus carros em determinado posto de gasolina situado à beira de uma estrada, eles sempre aproveitam para fazer também uma refeição no restaurante *self-service* desse posto. Cada vez que isso acontece: (1) O carro só é abastecido com um tipo de combustível, a saber, só com gasolina ou só com álcool. (2) 70% dos carros usam gasolina e 30% usam álcool. Seja $W \sim \text{Bernoulli}(p)$, com $p = 0,7$, onde $W = 1$ corresponde a gasolina e $W = 0$ corresponde a álcool. (3) A quantidade X de combustível em litros (de gasolina ou de álcool) colocada no tanque do veículo é Normal com média $\mu_X = 30$ e desvio padrão $\sigma_X = 10$. (4) O preço da gasolina é $\alpha = 4$ reais/litro e o preço do álcool é $\beta = 3$ reais/litro. (5) A quantidade Y de comida, em quilos, consumida em uma refeição no restaurante é Normal com média $\mu_Y = 0,5$ e desvio padrão $\sigma_Y = 0,2$. (6) O preço da comida no restaurante é $\gamma = 30$ reais/quilo. (7) Há independência entre as variáveis aleatórias W, X e Y. Então, $T = [\alpha W + \beta(1 - W)]X + \gamma Y$ é o montante dos gastos em reais, com combustível e com alimentação, durante uma parada nesse posto de um consumidor selecionado aleatoriamente. Calcule:

   (a) A distribuição da despesa total T, dado que o carro é abastecido com gasolina
   (b) A distribuição da despesa total T, dado que o carro é abastecido com álcool.
   (c) A média e o desvio padrão dessa despesa total T (sem separar pelo tipo de combustível).
   (d) A probabilidade de que ele gaste ao todo no máximo 150 reais, ou seja, $\Pr(T \leqslant 150)$.

   Sugestão: Use o Teorema da Probabilidade Total, condicionando em W.

Gabarito

1. (a) Vamos denotar por C_i o evento "o i-ésimo componente funciona" e por F o evento "o sistema funciona". Pelo enunciado, sabemos que $\Pr(C_i) = 1 - \Pr(C_i^c) = 1 - 0,1 = 0,9$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Com isso:

$$\begin{aligned}
\Pr(\{\text{pelo menos 1 comp. estar defeituoso}\}) &= \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{5} C_i^c\right) = 1 - \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{5} C_i\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{5} \Pr(C_i) = 1 - 0,9^5 = 0,4095.
\end{aligned}$$

Vale observar que a probabilidade da interseção acima pôde ser escrita como produtório das probabilidades devido a independência entre os componentes.

(b) Escrevendo a probabilidade do sistema funcionar a partir da chance de cada componente funcionar, temos que:

$$\begin{aligned}
\Pr(F) &= \Pr\left[\ C_1 \cap C_5 \cap (\ C_2 \cup (\ C_3 \cap C_4\ )\ )\ \right] \\
&= \Pr(C_1)\Pr(C_5)\Pr(\ C_2 \cup (\ C_3 \cap C_4\ )\ ) \\
&= 0,9 \times 0,9 \times \left[\Pr(C_2) + \Pr(\ C_3 \cap C_4\ ) - \Pr(\ C_2 \cap C_3 \cap C_4\ )\ \right] \\
&= 0,81 \times [0,9 + \Pr(C_3)\Pr(C_4) - \Pr(C_2)\Pr(C_3)\Pr(C_4)] \\
&= 0,81 \times [0,9 + 0,9^2 - 0,9^3] = 0,81 \times 0,981 = 0,7946.
\end{aligned}$$

(c) Aplicando o Teorema de Bayes, temos que:

$$\Pr(\ C_3^c \mid F\ ) = \frac{\Pr(\ F \mid C_3^c\ )\Pr(C_3^c)}{\Pr(F)} = \frac{0,1 \times \Pr(\ F \mid C_3^c\ )}{0,7946}$$

Note que, condicionado a C_3^c (ou seja, com componente 3 não funcionando), a única forma do sistema funcionar é se no caminho de cima (ver figura) todos os componentes estiverem funcionando adequadamente (ou seja, não apresentarem defeito). Dessa forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\Pr(\ C_3^c \mid F\ ) &= \frac{0,1 \times \Pr(\ F \mid C_3^c\ )}{0,7946} = \frac{0,1 \times \Pr(C_1 \cap C_2 \cap C_5)}{0,7946} \\
&= \frac{0,1 \times [\Pr(C_1)\Pr(C_2)\Pr(C_5)]}{0,7946} = \frac{0,1 \times [0,9^3]}{0,7946} = \frac{0,1 \times 0,729}{0,7946} = 0,09174.
\end{aligned}$$

2. Seja X a variável aleatória que representa o número de microcomputadores demandados pela clientela dessa loja ao longo de t dias. A demanda média diária é $\lambda = 3$ computadores/dia.

   (a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ com $\lambda t = 3 \times 1 = 3$, ou seja, $\Pr(X = x) = \dfrac{e^{-3}3^x}{x!}$, para $x = 0, 1, 2, \ldots$. Então,

   $$\Pr(X \leqslant 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = 0,04978707 + 0,1493612 + 0,2240418 = 0,4231901.$$

   (b) $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ com $\lambda t = 3 \times 2 = 6$, ou seja, $\Pr(X = x) = \dfrac{e^{-6}6^x}{x!}$, para $x = 0, 1, 2, \ldots$. Então,

   $$\Pr(X \leqslant 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = 0,002478752 + 0,01487251 + 0,04461754 = 0,0619688.$$

   (c) Agora, seja Y a variável aleatória que representa o número de lojas, entre as 4 lojas, que não atendem a demanda por microcomputadores ao longo de 1 dia. Pelo item (a), sabemos que, se $t = 1$, $\Pr(X \leqslant 2) = 0,423$. Assim, deixar de atender seria: $\Pr(X > 2) = 1 - 0,423 = 0,577$. Então,

   $$Y \sim \text{Binomial}(n = 4,\ p = 0,577), \quad \text{isto é,} \quad \Pr(Y = y) = \binom{4}{y}(0,577)^y(0,423)^{4-y},\ y = 0, 1, 2, 3, 4.$$

   Portanto, a probabilidade de receber a advertência é

   $$\Pr(Y \geqslant 2) = 1 - [\Pr(Y = 0) + \Pr(Y = 1)] = 1 - [0,032 + 0,175] = 0,793.$$

3.

(a)

$$\Pr(1 \leqslant X \leqslant 3) = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{4}dx + \int_2^3 \frac{1}{8}dx = \left.\frac{x^2}{8}\right]_1^2 + \left.\frac{x}{8}\right]_2^3 = \frac{4-1+3-2}{8} = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_0^2 x\frac{x}{4}dx + \int_2^6 x\frac{1}{8}dx + \int_6^{\infty} x0dx \\
&= \int_0^2 \frac{x^2}{4}dx + \int_2^6 \frac{x}{8}dx \\
&= \left.\frac{x^3}{12}\right]_0^2 + \left.\frac{x^2}{16}\right]_2^6 = \frac{8-0}{12} + \frac{36-4}{16} = \frac{2}{3} + 2 \\
&= 2,67 \text{ anos.}
\end{aligned}$$

4.

(a) Quando o carro é abastecido com gasolina, a média e a variância do gasto total são, respectivamente:

$$\begin{aligned}\alpha\mu_X + \gamma\mu_Y &= 4 \times 30 + 30 \times 0,5 = 135 \quad \text{reais;} \quad \text{e} \\ \alpha^2\sigma_X^2 + \gamma^2\sigma_Y^2 &= 4^2 \times 10^2 + 30^2 \times 0,2^2 = 1.636 \quad \text{reais}^2 \quad (\text{devido à independência entre } X \text{ e } Y).\end{aligned}$$

Como a distribuição condicional de T dado que $W = 1$ é uma combinação linear de Normais, ela é Normal(135; 1.636).

(b) Quando o carro é abastecido com álcool, a média e a variância do gasto total são, respectivamente:

$$\begin{aligned}\beta\mu_X + \gamma\mu_Y &= 3 \times 30 + 30 \times 0,5 = 105 \quad \text{reais;} \quad \text{e} \\ \beta^2\sigma_X^2 + \gamma^2\sigma_Y^2 &= 3^2 \times 10^2 + 30^2 \times 0,2^2 = 936 \quad \text{reais}^2 \quad (\text{devido à independência entre } X \text{ e } Y).\end{aligned}$$

Como a distribuição condicional de T dado que $W = 0$ é uma combinação linear de Normais, ela é Normal(105; 936).

(c) Seja $V = \alpha W + \beta(1 - W) = \beta + (\alpha - \beta)W$. Então,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(V) &= \beta + (\alpha - \beta)\mathrm{E}(W) \\ &= \beta + (\alpha - \beta)p \\ &= 3 + (4 - 3) \times 0,7 = 3,7 \ \text{reais/litro.} \\ \mathrm{Var}(V) &= (\alpha - \beta)^2\mathrm{Var}(W) \\ &= (\alpha - \beta)^2 p(1 - p) \\ &= (4 - 3)^2 \times 0,7 \times 0,3 = 0,21 \ (\text{reais/litro})^2. \\ \mathrm{E}(V^2) &= \mathrm{Var}(V) + [\mathrm{E}(V)]^2 = 0,21 + 3,7^2 = 13,9 \ (\text{reais/litro})^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, $T = VX + \gamma Y$. Como W e X são independentes e V é função de W, temos que V e X são independentes, bem como V^2 e X^2 são também independentes. Então,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T) &= \mathrm{E}(VX) + \gamma\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(V)\mu_X + \gamma\mu_Y = 3,7 \times 30 + 30 \times 0,5 = 126 \ \text{reais} \\ \mathrm{Var}(T) &= \mathrm{Var}(VX) + \gamma^2\mathrm{Var}(Y) \quad (\text{pois } VX \text{ e } Y \text{ são também independentes}) \\ &= \mathrm{E}(V^2X^2) - [\mathrm{E}(VX)]^2 + \gamma^2\mathrm{Var}(Y) \\ &= \{\mathrm{E}(V^2)\mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(V)\mathrm{E}(X)]^2\} + \gamma^2\sigma_Y^2 \\ &= \mathrm{E}(V^2)(\mu_X^2 + \sigma_X^2) - [\mathrm{E}(V)\mu_X]^2 + \gamma^2\sigma_Y^2 \\ &= 13,9 \times (30^2 + 10^2) - [3,7 \times 30]^2 + 30^2 \times 0,2^2 = 1.615 \ \text{reais}^2. \\ \mathrm{DP}(T) &= \sqrt{1.615} = 40,19 \ \text{reais.}\end{aligned}$$

(d) Pelo Teorema da Probabilidade Total, temos que

$$\begin{aligned}\Pr(T \leqslant 150) &= \Pr(T \leqslant 150|W = 0)\Pr(W = 0) + \Pr(T \leqslant 150|W = 1)\Pr(W = 1) \\ &= \Pr\left(\frac{T - 105}{\sqrt{936}} \leqslant \frac{150 - 105}{\sqrt{936}}\right) \times 0,3 + \Pr\left(\frac{T - 135}{\sqrt{1636}} \leqslant \frac{150 - 135}{\sqrt{1636}}\right) \times 0,7 \\ &= 0,929 \times 0,3 + 0,645 \times 0,7 = 0,730.\end{aligned}$$