**UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos**
**Probabilidade e Estatística - Estatística**

Primeira Prova 23-05-2013

**Atenção:** Não serão aceitas respostas sem justificativa: as expressoões que levaram a alguma resposta numérica devem ser indicadas nos espaços apropriados.

---

1. Para sagrar-se campeão de um torneio de tênis, um jogador precisa vencer quatro partidas sucessivas, todas elas eliminatórias. José é um dos participantes e suas probabilidades de vitória em cada partida (caso ele não tenha sido eliminado até então) foram estimadas em: 80% na $1^a$ partida, 70% na $2^a$ partida, 60% na $3^a$ partida (semifinal) e 50% na $4^a$ partida (final). Observe que estas probabilidades independem de quem seja o seu adversário em cada partida. Calcule as probabilidades de que José:

   (a) Não consiga chegar até a final;

   (b) Consiga chegar a uma semifinal, dado que não será o campeão.

2. Um vendedor de seguros vende em média 3 apólices por semana (7 dias). O número de apólices vendidas pode ser modelada por uma distribuição Poisson.

   (a) Calcule a probabilidade de que ele venda 2 ou mais apólices numa dada semana;

   (b) Foram escolhidas 4 semanas aleatoriamente, de maneira que se possa supor independência das vendas entre as semanas. Deseja-se saber a probabilidade de em exatamente 3 semanas, entre as 4 escolhidas, terem sido vendidas 2 ou mais apólices;

   (c) Calcule a probabilidadede de que ele venda 1 apólice durante um período de 5 dias.

3. A distribuição da renda, expressa em salários mínimos (s.m.), dos membros de um sindicato é caracterizada pela função de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & \text{se} \quad x \geqslant 1 \\ 0, & \text{se} \quad x < 1. \end{cases}$$

   (a) Calcule o desvio padrão (em s.m.) dessa variável;

   (b) Determine o nível salarial (em s.m.) abaixo do qual estão os salários de 87,5% (ou seja, 7/8) desses profissionais.

4. $X_1$ e $X_2$ representam os valores (em reais) que as ações $A_1$ e $A_2$, respectivamente, terão daqui a um ano. Como sabemos, o comportamento caótico da bolsa de valores implica que $X_1$ e $X_2$ podem ser considerados aleatórios. Suponha, mais especificamente, que:

   - $X_1$ é modelada por uma distribuição Normal com média de 30 reais e variância de 100 reais$^2$;
   - $X_2$ é modelada por uma distribuição Normal com média de 60 reais e variância de 400 reais$^2$; e
   - as cotações dessas duas ações são independentes.

   Um investidor comprou hoje 300 ações $A_1$ a 25 reais cada uma, e 200 ações $A_2$ a 40 reais cada uma.

   (a) Quais são a distribuição, a esperança e o desvio padrão do valor total que a carteira de ações deste investidor terá dentro de um ano?

   (b) Qual é a probabilidade de que essa a carteira de ações tenha se valorizado em pelo menos 50% depois de um ano?

---

Boa prova!

**SOLUÇÃO:**

1. **Podemos considerar que o experimento tem 5 resultados possíveis, com as seguintes probabilidades:**
   **e1 (Eliminado na 1$a$ partida) $\Rightarrow$ p(e1) = 0,2**
   **e2 (Eliminado na 2$a$ partida) $\Rightarrow$ p(e2 )= 0,8×0,3 = 0,24**
   **e3 (Eliminado na 3$a$ partida) $\Rightarrow$ p(e3) = 0,8×0,7×0,4 = 0,224**
   **e4 (Eliminado na 4$a$ partida) $\Rightarrow$ p(e4)= 0,8×0,7×0,6×0,5 = 0,168**
   **v (Vencedor das 4 partidas) $\Rightarrow$ p(v)= 0,8×0,7×0,6×0,5 = 0,168**
   **Assim,** $\Omega = \{e1, e2, e3, e4, v\}$

   **Sejam:**
   **F = Chegar à final =** $\{e4, v\}$ **$\Rightarrow$ P(F) = 0,168 + 0,168 = 0,336**
   **S = Chegar à semifinal =** $\{e3, e4, v\}$ **$\Rightarrow$ P(S) =0,224 + 0,168 + 0,168 = 0,560**
   **C = Ser Campeão = {v} $\Rightarrow$ P(C) = 0,168**

   (a) **P(F$^C$) = 1 - 0,336 = 0,664;**

   (b) **P(S | C$^c$) =** $\frac{P(S \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{P(e3,e4)}{1-P(v)} = \frac{0{,}168+0{,}224}{1-0{,}168} = 0,471$

2. (a) **X = n$^o$ de apólices vendidas em 1 semana; X ∼ Poisson($\lambda$ =3)**
   $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] = 1 - e^{-3}(1 + 3) = 1 - 4e^{-3} = 0,801$

   (b) **Y = n$^o$ de de semanas, entre as 4 escolhidas, que tiveram 2 ou mais apólices vendidas; Y ∼ Binomial(n=4, p=0,80). Assim,** $P(Y = 3) = 4 \times 0,8^3 \times 0,2^1 = 0,4096$

   (c) **Z = n$^o$ de apólices vendidas em 5 dias; Z ∼ Poisson(**$\lambda = 3 \times 5/7$**)**
   **P(Z=1) =** $\frac{e^{-15/7}(15/7)^1}{\mathbf{1!}} = (15/7)e^{-15/7} = 0,251$

3. **X = renda (em s.m.) de um membro do sindicato selecionado ao acaso.**
   (a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_1^\infty xf(x)dx = \int_1^\infty x3x^{-4}dx = \int_1^\infty 3x^{-3}dx = 3\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_1^\infty = \frac{3}{2}. \\
\mathbf{E}(X^2) &= \int_1^\infty x^2 f(x)dx = \int_1^\infty x^2 3x^{-4}dx = \int_1^\infty 3x^{-2}dx = 3\left[-x^{-1}\right]_1^\infty = 3. \\
\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}. \textbf{ Logo, DP(X) = 0,867 s.m.}
\end{aligned}$$

   (b) $F(x) = 0$ **para** $x < 1$ **e** $F(x) = \int_1^x f(s)ds = \int_1^x 3s^{-4}ds = \left[-s^{-3}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^3}$ **para** $x \geqslant 1$.
   **Logo,** $F(\zeta_{7/8}) = 1 - \frac{1}{(\zeta_{7/8})^3} = \frac{7}{8} \Rightarrow \zeta_{7/8} = 2$.

4. (a) **O valor total do portfólio daqui a um ano será:** $Y = 300X_1 + 200X_2$.
   **O valor esperado de Y é:** $\mu = E(Y) = 300 \times 30 + 200 \times 60 = 21\,000$ $reais$
   **A variância de Y é:** $\sigma^2 = Var(Y) = 300^2 \times 100 + 200^2 \times 400 = 25\,000\,000$.
   **Daí** $DP(Y) = \sqrt{25\,000\,000} = 5\,000$ **reais.**
   **A distribuição de Y é então N(21 000; 5 000$^2$)**

   (b) **O valor total do portfólio na compra é :** $v = 300 \times 25 + 200 \times 40 = 15\,500$ **reais.**
   **A probabilidade pedida é então:**
   $P[Y \geq 1,5 \times 15\,500] = P[Y \geq 23\,250] = P[\frac{Y-21\,000}{5000} \geq \frac{23\,250-21\,000}{5000}] =$
   $= P[Z \geq 0,45] = 1 - \Phi(0,45) = 0.3264$