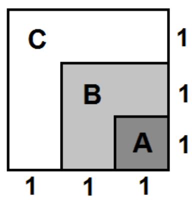
UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Primeira Avaliação de Probabilidade e Estatística **26-09-2019**
Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa.
Resolver as questões nos espaços apropriados.

Q1) Um terreno quadrado de área 9Km^2 apresenta três tipos diferentes de solo: A, B e C, de acordo com a ilustração abaixo. Sabe-se que a chance de uma semente conseguir germinar no solo A é 80%, no solo B é 50% e no solo C é 20%. Além disso, assuma que a probabilidade de que uma semente levada pelo vento até esse terreno caia em cada um dos tipos de solo é proporcional a sua área.



(a) Calcule a probabilidade de que uma semente que caia nesse terreno consiga germinar.

(b) Considerando que duas sementes caiam nesse terreno (de forma independente), calcule qual a probabilidade de que elas caiam em solos de tipos diferentes.

(c) Considere agora que as duas sementes cairam no mesmo tipo de solo e que, posteriormente, observou-se que ambas conseguiram germinar. Calcule qual a probabilidade de que o solo em que elas caíram seja do tipo A.

Q2) Suponha que o número de passageiros em uma viagem de Uber Juntos, do Fundão à Zona Sul no horário de retorno, oferecida diariamente pelo motorista Carlos, seja uma v.a. que segue uma distribuição de Poisson com média de 2 passageiros interessados. No carro, além do motorista, há somente 4 lugares disponíveis. Se não houver um mínimo de 3 passageiros, o custo-benefício não é eficiente e neste caso, Carlos não realiza a viagem. Calcule a probabilidade:

(a) de que, em um determinado dia, tenha mais interessados na viagem de Carlos do que vagas em seu carro;
(b) de que a viagem não se realize por falta de passageiros interessados (arredonde o resultado para 2 casas decimais);
(c) de numa semana com 5 dias de tentativas dessas viagens, exatamente 3 delas não tenham sido realizadas por número insuficiente de passageiros. Assuma independência do número de passageiros entre os dias;
(d) condicional de que todos os interessados consigam a viagem dado que foi atingido o número mínimo de passageiros.

Q3) No processo de produção de vinho de uma determinada vinícola, a concentração total de açúcares de todos os vinhos produzidos é assumida seguir uma distribuição normal com média de 12 g/L e desvio padrão de 5 g/L. Um vinho é considerado seco se possui no máximo até 5 g/L de concentração de açúcar; meio doce (demi-sec) se possui concentração de açúcar entre 5 e 20 g/L; e doce se possui concentração de açúcar maior que 20 g/L.

(a) Qual é a proporção de vinhos do tipo seco produzidos pela vinícola?
(b) Entre os vinhos que **não** são do tipo seco, qual é a proporção de vinhos do tipo doce?
(c) A vinícola dá uma classificação especial aos 1% dos vinhos com a maior quantidade de açúcar. Acima de qual quantidade de açúcar, um vinho recebe essa classificação?

Q4) Uma companhia telefônica A cobra para chamadas telefônicas uma taxa inicial de K reais mais R\$0,15 por minuto, enquanto uma companhia telefônica B cobra apenas R\$0,10 para cada minuto elevado ao quadrado. Assim as receitas, por chamada, são $R_a = K + 0,15T$ e $R_b = 0,10T^2$; onde T é a duração da chamada, em minutos . Por qualquer fração de minuto no final de uma chamada, ambas as companhias cobram por um minuto inteiro. Suponha que o tempo de duração de uma chamada em minutos siga um modelo exponencial com média igual a 4 se a ligaçao é feita usando a companhia A e um modelo exponencial com média igual a 2 se a ligação é feita usando a companhia B.

(a) Qual deveria ser o valor de K para que $E(R_a) = E(R_b)$, a receita média por chamada da companhia A seja igual a receita média por chamada da companhia B?
(b) No último mês a companhia A resolveu implantar uma nova estratégia para o cálculo da taxa inicial K: para ligações de até x minutos de duração adota-se uma taxa inicial de R\$0,50 e para ligações com mais de x minutos adota-se uma taxa de R\$0,10. Indique em qual faixa de valores deve estar o x para que o valor esperado de K seja maior que 0,20.
(c) Um cliente tem dois telefones, um associado a companhia A e outro a companhia B. Para fazer uma ligação o cliente escolhe o telefone da companhia A com 70% de probabilidade e escolhe o da companhia B com 30% de probabilidade. Calcule a probabilidade deste cliente permanecer um tempo superior a 3 minutos numa ligação.

Boa Prova!

Solução

Q1) (a) Vamos considerar os eventos A,B,C = {a semente caiu no solo do tipo A,B,C respectivamente} e G = {a semente conseguir germinar}. Primeiro vamos obter as probabilidades da semente cair em cada tipo de solo usando a informação de que essa probabilidade é proporcional a área:

$$P(A) = \frac{\text{área de A}}{\text{área total}} = \frac{1}{9} \quad ; \quad P(B) = \frac{\text{área de B}}{\text{área total}} = \frac{3}{9} \quad ; \quad P(C) = \frac{\text{área de C}}{\text{área total}} = \frac{5}{9}.$$

Agora vamos obter $P(G)$ através do Teorema da Probabilidade Total:

$$P(G) = P(G|A)P(A)+P(G|B)P(B)+P(G|C)P(C) = \frac{8}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{9} = \frac{8+15+10}{90} = \frac{11}{30} \approx 0,367.$$

(b) Vamos denotar por M o evento "as duas sementes caem no mesmo tipo de solo". Nosso objetivo é obter $P(M^c)$, então vamos calcular primeiro $P(M)$ e depois fazer $P(M^c) = 1 - P(M)$. Para calcular $P(M)$, note que temos apenas três possibilidades (disjuntas) em que ambas as sementes caem no mesmo tipo de solo: Ou as duas caem no A, ou no B ou no C (vamos denotar por A_2, B_2 e C_2 esses casos). Logo:

$$P(M) = P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2)+P(B_2)+P(C_2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{1+9+25}{81} = \frac{35}{81} \approx 0,432,$$

onde $P(A_2)$ ficou igual a $P(A)^2$ devido a independência entre os locais de queda de cada semente (mesma justificativa vale para B_2 e C_2). Portanto, $P(M^c) = \dfrac{46}{81} \approx 0,568$.

(c) Primeiro precisamos atualizar a probabilidade de cada tipo de solo levando em conta o fato de que as duas sementes necessariamente cairam no mesmo tipo solo. Aproveitando os cálculos do item (b), temos:

$$P(A_2|M) = \frac{P(A_2 \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{81}}{\frac{35}{81}} = \frac{1}{35} \quad ; \quad P(B_2|M) = \frac{\frac{9}{81}}{\frac{35}{81}} = \frac{9}{35} \quad ; \quad P(C_2|M) = \frac{\frac{25}{81}}{\frac{35}{81}} = \frac{25}{35}.$$

Para simplificar vamos denotar as probabilidades acima por $P^*(A_2)$, $P^*(B_2)$ e $P^*(C_2)$. Agora, denotando por G_2 o evento "as duas sementes conseguem germinar", vamos obter a probabilidade de G_2 para cada tipo de solo:

$$P(G_2|A_2) = P(G|A)^2 = \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} \quad ; \quad P(G_2|B_2) = P(G|B)^2 = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{25}{100} \;;$$

$$P(G_2|C_2) = P(G|C)^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{4}{100}.$$

Por fim, vamos obter a probabilidade desejada utilizando o Teorema de Bayes:

$$P(A_2|G_2, M) = \frac{P(G_2|A_2)P^*(A_2)}{P(G_2|A_2)P^*(A_2) + P(G_2|B_2)P^*(B_2) + P(G_2|C_2)P^*(C_2)} = \frac{\frac{64}{100}\times\frac{1}{35}}{\frac{64}{100}\times\frac{1}{35}+\frac{25}{100}\times\frac{9}{35}+\frac{4}{100}\times\frac{25}{35}} =$$

$$= \frac{64}{64+225+100} = \frac{64}{389} \approx 0,1645.$$

Q2) Seja X= Número de passageiros interessados no dia examinado. X$\sim$Poisson($\lambda = 2$).
Então, $p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$

(a) P(mais passageiros interessados do que vagas disponíveis) =
P(X> 4) $= 1 - \sum_{i=0}^{4} p(i) = 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2^2/2! + 2^3/3! + 2^4/4!) =$ 0,05265 $\approx$ 0,05;

(b) P(A viagem não seja oferecida por falta de passageiros) =
P(X≤ 2) $= \sum_{i=0}^{2} p(i) = e^{-2}(1 + 2 + 2^2/2!) = 5\ e^{-2} =$ 0,6767 $\approx$ 0,68;

(c) Seja Y=Número de viagens realizadas entre as 5 tentativas. Y $\sim$ Binom(n=5, p=0,68)
P(Y=3) $= 10 \times 0,68^3 \times 0,32^2 = 0,3220$;

(d) P(todos os interessados consigam viajar | foi atingido o número mínimo de passageiros) =
$P(X \leq 4 \mid X \geq 3) = \frac{P(3 \leq X \leq 4)}{P(X \geq 3)} = \frac{e^{-2}(2^3/3! + 2^4/4!)}{1 - e^{-2}(1 + 2 + 2^2/2!)} = \frac{0{,}2707}{0{,}3233} =$ 0,8373.

Q3) (a) Seja X a quantidade de açúcar; então, $X \sim N(12, 25)$. Queremos calcular

$$\begin{aligned} P(X < 5) &= P\left(Z < \frac{5-12}{5}\right) = P(Z < -1,4) \\ &= \Phi(-1,4) = 1 - \Phi(1,4) = 1 - 0,9192 = 0,0808. \end{aligned}$$

(b) Queremos calcular

$$\begin{aligned} P(X > 20 \mid X \geq 5) &= \frac{P(X > 20, X \geq 5)}{P(X \geq 5)} \\ &= \frac{P(X > 20)}{P(X \geq 5)} = \frac{P\left(Z > \frac{20-12}{5}\right)}{1 - P(X < 5)} \\ &= \frac{P(Z > 1,6)}{0,9192} = \frac{1 - \Phi(1,6)}{0,9192} \\ &= \frac{1 - 0,9452}{0,9192} = \frac{0,0548}{0,9192} = 0,0596. \end{aligned}$$

(c) Queremos calcular o valor $x_{0,99}$ de forma que $P(X > x_{0,99}) = 0,01$ ou $P(X \leq x_{0,99}) = 0,99$. Assim,

$$P(X \leq x_{0,99}) = 0,99 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{x_{0,99} - 12}{5}\right) = 0,99.$$

Temos que

$$\frac{x_{0,99} - 12}{5} = z_{0,99} = 2,33 \Rightarrow x_{0,99} = 2,33 \times 5 + 12 = 23,65.$$

Q4) (a) Sejam

$$R_a : \text{receita da companhia telefônica A}$$

$$R_b : \text{receita da companhia telefônica B}$$

$$T : \text{tempo de duração de uma chamada em minutos}$$

Para chamadas feitas usando a operadora A temos que $T \sim \text{Exp}(1/4)$, com $E(T) = 4$ e para chamadas feitas usando a operadora B temos que $T \sim \text{Exp}(1/2)$, com $E(T) = 2$. Como $R_a = K + 0,15T$ e $R_b = 0,10T^2$. Então, pela lineariedade da esperança, temos que:

$$\begin{aligned} E(R_a) &= K + 0,15E(T) = K + 0,15 \times 4 = K + 0,6 \\ E(R_b) &= 0,10E(T^2) = 0,10 \times [Var(T) + E^2(T)] = 0,10 \times (4+4) = 0,80 \end{aligned}$$

Assim, $E(R_a) = E(R_b)$ se e somente se K = 0,20.

(b) Temos que

$$K = \begin{cases} 0,50, & T \leq x \\ 0,10, & T > x \end{cases}$$

$$E(K) = 0,5P(T \leq x) + 0,1P(T > x) = 0,1 + 0,4P(T \leq x)$$

Como

$$P(T \leq x) = \int_0^x \frac{1}{4} \exp\left\{-\frac{1}{4}u\right\} du = 1 - \exp\left\{-\frac{x}{4}\right\},$$

então

$$E(K) = 0,1 + 0,4\left(1 - \exp\left\{-\frac{x}{4}\right\}\right) = 0,5 - 0,4\exp\left\{-\frac{x}{4}\right\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0,5 - 0,4\exp\left\{-\frac{x}{4}\right\} &> 0,2 \\ 0,4\exp\left\{-\frac{x}{4}\right\} &< 0,3 \\ \exp\left\{-\frac{x}{4}\right\} &< 0,75 \\ -\frac{x}{4} &< \log_e 0,75 \\ x &> 1,16 \end{aligned}$$

(c) Sejam

$$A : \text{telefone da operadora A é escolhido}$$

$$B : \text{telefone da operadora B é escolhido}$$

Temos que $P(A) = 0,7$ e $P(B) = 0,3$.

$$\begin{aligned} P(T > 3) &= P(T > 3 \mid A)P(A) + P(T > 3 \mid B)P(B) \\ &= 0,7\exp\left\{-\frac{3}{4}\right\} + 0,3\exp\left\{-\frac{3}{2}\right\} \approx 0,398 \end{aligned}$$