Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Prova Final de Estatística Unificada

Turma: Engenharia — Data: 15/12/2011

---

1. Suponha que 5% das pessoas de uma certa população possuam glaucoma. Testes para detectar presença de glaucoma são realizados em pacientes que vão ao hospital. Para paciente com glaucoma, a probabilidade do resultado do teste para glaucoma ser positivo é de 98%; e para pacientes sem glaucoma, a probabilidade do resultado do teste para glaucoma ser positivo é de 4%. Obtenha a probabilidade de:

   a) um indivíduo ter glaucoma, dado que o mesmo obteve resultado positivo no teste;

   b) um indivíduo ter glaucoma, dado que o mesmo não obteve resultado positivo.

2. Admita que um determinado sinal só pode ser detectado a uma distância da fonte emissora que esteja entre 1 km e 2 km. Se a variável aleatória X (em km) representa a posição, ao longo de um determinado eixo, do local onde o sinal será recebido; e se a fonte emissora está localizada na origem desse eixo, pode-se afirmar que a densidade de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } 1 < |x| < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

   Determine:

   a) $E(X)$;

   b) $Var(X)$.

3. Sabe-se que as variáveis aleatórias X e Y são tais que $E(X) = 10$ e $Var(X) = 16$, $E(Y) = 20$ e $Var(Y) = 25$. Sejam $S = X + Y$ e $T = X - Y$. Se, além disso, sabe-se também que $Var(T) = 46$, calcule:

   a) o coeficiente de correlação entre X e Y;

   b) o coeficiente de variação de S.

4. Se $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde μ é um parâmetro conhecido e σ^2 é um parâmetro desconhecido:

   a) determine o EMV de σ^2;

   b) este estimador é ou não tendencioso? Por quê?

5. As indústrias de pneus Roda Bem e Boa Roda acabaram de lançar no mercado novas versões de seus dois principais tipos de pneus, que se enquadram na mesma categoria. A indústria Roda Bem vem produzindo este tipo de pneu com mais durabilidade nos últimos nove anos. Uma revista especializada resolveu fazer um teste depois que a indústria Boa Roda declarou finalmente ter superado a concorrente com respeito a durabilidade de seu produto. Foi selecionada aleatoriamente uma amostra de 60 pneus da indústria Roda Bem em que observou-se durabilidade média de 45000 km com desvio padrão amostral de 600 km. Para a indústria Boa Roda, foram selecionados aleatoriamente 40 pneus em que observou-se durabilidade média de 45200 km com desvio padrão amostral de 400 km.

   a) Ao nível de 5% de significância, podemos concluir que a indústria Boa Roda fala a verdade?

   b) Calcule o p-valor do teste construído no item anterior.

Respostas

1. G : ter glaucoma.
   A : resultado positivo para glaucoma no exame.

$$\begin{aligned} P(G) &= 0,05 \\ P(A \mid G) &= 0,98 \therefore P(A^C \mid G) = 0,02 \\ P(A \mid G^C) &= 0,04 \therefore P(A^C \mid G^C) = 0,96 \end{aligned}$$

   (a)

$$\begin{aligned} P(G \mid A) &= \frac{P(A \mid G)P(G)}{P(A \mid G)P(G) + P(A \mid G^C)P(G^C)} = \frac{0,98 \times 0,05}{0,98 \times 0,05 + 0,04 \times 0,95} \\ &= \frac{0,049}{0,049 + 0,038} = \frac{49}{87} = 0,5632. \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} P(G \mid A^C) &= \frac{P(A^C \mid G)P(G)}{P(A^C \mid G)P(G) + P(A^C \mid G^C)P(G^C)} = \frac{0,02 \times 0,05}{0,02 \times 0,05 + 0,96 \times 0,95} \\ &= \frac{0,001}{0,001 + 0,912} = \frac{1}{913} = 0,0011. \end{aligned}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } -1 < x < -2 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a)

$$E(X) = \int_{-2}^{-1} x\frac{1}{2}dx + \int_{1}^{2} x\frac{1}{2}dx = \frac{1}{4}[(-1)^2 - (-2)^2] + \frac{1}{4}[2^2 - 1^2] = 0\,\text{km}.$$

   (b)

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-2}^{-1} x^2\frac{1}{2}dx + \int_{1}^{2} x^2\frac{1}{2}dx - 0^2 \\ &= \frac{1}{6}[(-1)^3 - (-2)^3] + \frac{1}{6}[2^3 - 1^3] = \frac{7}{3} = 2,33\,\text{km}^2. \end{aligned}$$

3. (a)

$$46 = Var(T) = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 16 + 25 - 2Cov(X,Y).$$

   Então,

$$Cov(X,Y) = \frac{Var(X) + Var(Y) - Var(X - Y)}{2} = \frac{16 + 25 - 46}{2} = -2,5.$$

   Consequentemente,

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-2,5}{\sqrt{16 \times 25}} = -0,125.$$

(b)

$$Var(S) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 16 + 25 + 2 \times (-2,5) = 36.$$

$$CV(S) = \frac{DP(S)}{E(S)} = \frac{\sqrt{Var(S)}}{E(X)+E(Y)} = \frac{\sqrt{36}}{10+20} = \frac{\sqrt{36}}{30} = 0,2.$$

4. (a) A função de verossimilhança é

$$L = \prod_{i=1}^{n} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Portanto,

$$\ln(L) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Como minimizar L é o mesmo que maximizar $\ln(L)$, basta calcular a derivada de $\ln(L)$ com relação a σ^2 e igualá-la a zero:

$$0 = \frac{d\ln(L)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

Resolvendo essa equação, obtemos $\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$, que é o EMV de σ^2.

(b)

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Var[X_i] = \frac{1}{n}n\sigma^2 = \sigma^2.$$

5. μ_1: duração média dos pneus Roda Bem.
μ_2: duração média dos pneus Boa Roda.
$\overline{x} = 45000$: média amostral da duração dos pneus Roda Bem.
$\overline{y} = 45200$: média amostral da duração dos pneus Boa Roda.
$s_X = 600$: desvio padrão amostral da duração dos pneus Roda Bem.
$s_Y = 400$: desvio padrão amostral da duração dos pneus Boa Roda.
$n = 60$: tamanho da amostra de pneus Roda Bem.
$m = 40$: tamanho da amostra de pneus Boa Roda.

(a) Queremos testar

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 &\geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 &< \mu_2. \end{aligned}$$

ao nível de 5% de significância.
Como n e m são grandes e os desvios padrões não são conhecidos, utilizaremos

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

como estatística de teste. Assim, rejeitamos a hipótese nula se $T < -1,64$.
Em nosso caso,

$$\begin{aligned} T &= \frac{45000 - 45200}{\sqrt{\frac{600^2}{60} + \frac{400^2}{40}}} \\ &= \frac{-200}{\sqrt{6000+4000}} \\ &= \frac{-200}{\sqrt{10000}} \\ &= \frac{-200}{100} = -2. \end{aligned}$$

Logo, rejeitamos H_0 ao nível de 5% de significância, ou seja, há evidências de que as indústrias Boa Roda, de fato, produzem agora pneus com mais durabilidade.

(b) $\tilde{\alpha} = P(T < -2) = \Phi(-2) = 0,0228$.