UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos
Probabilidade e Estatística - Estatística

Prova Final 18-07-2013

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa: as expressões que levaram a alguma resposta numérica devem ser indicadas nos espaços apropriados.

1. Um conjunto de creches reúne um número bastante grande de crianças de 1, 2, 3 e 4 anos de idade com frequências relativas respectivas 20%, 25%, 25% e 30%. Duas dessas crianças serão aleatoriamente escolhidas. Faça X denotar o valor absoluto da diferença entre as duas idades sorteadas.

   (a) Determine a função de probabilidade de X

   (b) Calcule a média e variância de X

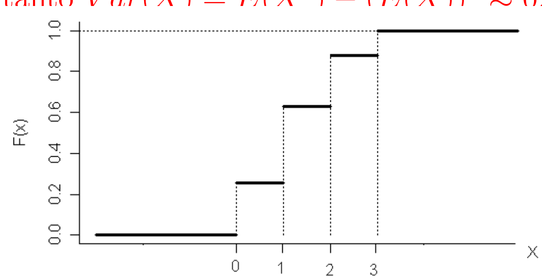
   (c) Faça o gráfico da distribuição acumulada de X.

   Solução:

   (a) Nas condições do enunciado, as idades das duas crianças escolhidas podem ser assumidas independentes. Segue que
   $P(0) = 0,2^2 + 0,25^2 + 0,25^2 + 0,3^2 = 0,255$
   $P(1) = 2 \times (0,2 \times 0,25 + 0,25^2 + 0,25 \times 0,3) = 0,375$
   $P(2) = 2 \times (0,2 \times 0,25 + 0,25 \times 0,3) = 0,250$
   $P(3) = 2 \times 0,2 \times 0,3 = 0,12$

   (b) $E(X) = 0 \times 0,255 + 1 \times 0,375 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,12 = 1,235$, $E(X^2) = 0^2 \times 0,255 + 1^2 \times 0,375 + 2^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,12 = 2.455$. Portanto $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \approx 0,93$.

   (c) $F_X(x) = 0,\ x < 0$
   $F_X(x) = 0,255,\ x \in [0;1)$
   $F_X(x) = 0,63,\ x \in [1,2)$
   $F_X(x) = 0,88,\ x \in [2,3)$
   $F_X(x) = 1,\ x \geq 3$.



2. Uma loja vende peças de um determinado tipo. Sabe-se que, em média, 20% das peças fabricadas por seu fornecedor são defeituosas. As peças são embaladas em caixas com 10 unidades e, quando aparece um comprador, o atendente testa as peças antes de vendê-las. Se a caixa não tiver nenhuma peça defeituosa, seu preço de venda é de 10 reais; tendo uma, o preço é 8 reais; duas ou três, o preço é 6 reais; mais do que três, o preço é dois reais.

   (a) Determine a função de probabilidade do preço da caixa.

   (b) Qual o preço médio de uma caixa?

   (c) Calcule a probabilidade de que, num lote de 5 caixas, no máximo uma tenha mais do que três peças defeituosas?

   Solução:

   (a) Seja $Y \sim \text{Bin}(10; 0,2)$ o número de peças defeituosas na caixa, e seja X o preço da caixa. Então

$$P(X = 10) = P(Y = 0) = 0,11$$
$$P(X = 8) = P(Y = 1) = 0,27$$
$$P(X = 6) = P(2 \leq Y \leq 3) = 0,5$$
$$P(X = 2) = P(Y > 3) = 0,12$$

   (b) $E(X) = 10 \times 0,11 + 8 \times 0,27 + 6 \times 0,5 + 2 \times 0,12 = 6,5$ reais.

   (c) Seja $Z \sim \text{Bin}(5; 0,12)$ o número de caixas entre as 5, tendo mais de 3 peças defeituosas. Então $P(Z \leq 1) = P(Z = 0) + P(Z = 1) = 0,89$.

3. A média populacional μ deve ser estimada com base numa amostra aleatória de tamanho 5, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Denote por σ^2 a variancia populacional e considere os estimadores seguintes:

$$T_1 = \bar{X}\,, \quad ,T_2 = X_1\,, \quad T_3 = 2X_1 - 3X_2 + 4X_3 - 5X_4 + 6X_5\,, \quad T_4 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}.$$

(a) Identifique quais desses estimadores são não tendenciosos para μ.

(b) Determine o erro quadrático médio desses estimadores e diga qual o melhor, dentre os apresentados, para estimar μ. Justifique sua resposta.

Solução:

(a) Só T_3 é tendencioso porque

$$\begin{aligned} E(T_1) &= \frac{1}{n}\sum EX_i = \frac{1}{n}n\mu = \mu \\ E(T_2) &= EX_1 = \mu \\ E(T_3) &= 2\mu - 3\mu + 4\mu - 5\mu + 6\mu = 4\mu \\ E(T_4) &= \frac{\mu + \mu + \mu}{3} = \mu. \end{aligned}$$

(b) $EQM(T_1) = \frac{\sigma^2}{5}$, $EQM(T_2) = \sigma^2$, $EQM(T_4) = \frac{\sigma^2}{3}$,

$EQM(T_3) = Var(T_3) + (E(T_3) - \mu)^2 = (2^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-5)^2 + 6^2)\sigma^2 + (4\mu - \mu)^2 = 90\sigma^2 + 9\mu^2$,

portanto o melhor estimador é T_1 por ter o menor erro quadrático médio.

4. Dentro de um balde, há 2 moedas aparentemente idênticas: uma viciada com probabilidade 1/3 de dar cara, e a outra equilibrada (ou seja, com probabilidades iguais para cara e coroa). Uma pessoa escolhe uma das moedas que estão dentro do balde, e a lança 100 vezes, obtendo 41 caras.

(a) Testar H_0 : "a moeda equilibrada foi a escolhida" contra H_1 : "a moeda viciada foi a escolhida" ao nível 0,025 de significância.

(b) Qual é o p-valor deste teste?

(c) Com este teste, qual é a probabilidade de se concluir pela rejeição de H_0, se a moeda escolhida for de fato a viciada?

Obs.: Como $1/3 < 1/2$, o teste se enquadra no caso de $H_0 : p \geq 1/2$ contra $H_1 : p < 1/2$.

Solução:

(a) Observamos que sob H_0, $\hat{p} \overset{\approx}{\sim} N(\frac{1}{2}, \frac{1}{20})$. assim, o critério é: Rejeitar H_0 se $\hat{p}_{obs} < \hat{p}_{tab} = \frac{1}{2} - 1,96\frac{1}{20} = 0,402$, caso contrário, aceitar H_0. Como $\hat{p}_{obs} = 0,41$, segue que não há evidência para rejeitamos H_0.

(b) $\tilde{\alpha} = P_{H_0}(\hat{p} \leq 0,41) \approx P(Z \leq -0,09 \times 20) = 1 - \phi(1,8) = 0,0359$.

(c) É a probabilidade de rejeitar H_0 sendo H_0 falsa. Observamos que sob H_1, $\hat{p} \overset{\approx}{\sim} N(\frac{1}{3}, \frac{2}{900})$, portanto

$$\begin{aligned} P_{H_1}(\hat{p} \in R) = P_{H_1}\left(\hat{p} \leq \frac{1}{2} - 1,96\frac{1}{20}\right) &\approx P\left(Z \leq \frac{30}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1,96}{20}\right)\right) \\ &\approx \Phi(1,456) \approx 0,9265. \end{aligned}$$

Boa prova!