DME-IM-UFRJ - 2ª Prova de Estatística Unificada

Turma: Engenharia **Data: 12/06/2012**

1 - Admita que a distribuição do peso dos usuários de um elevador seja uma Normal com média 75kg e com desvio padrão 15kg. Suponha que quatro pessoas apareçam aleatoriamente para usar esse elevador.

a) Sabendo que o limite de peso recomendado para o elevador é de 350 kg, use a distribuição da soma dos pesos das quatro pessoas para calcular a probabilidade de que o peso no elevador não exceda esse limite.
b) Na construção de um novo elevador, qual deve ser o limite de carga para que se garanta, com 99,5% de confiança, que a soma dos pesos de quatro pessoas dessa população de usuários não ultrapasse este limite?

2 - Determinada indústria suspeita que está recebendo, de um certo fornecedor, peças de aço fora das especificações. Ela decidiu então avaliar a quantidade de carbono e a dureza do aço de tais peças. Para isso, usou nove peças e obteve as seguintes medidas:

x = Teor de carbono (%)	1,41	1,24	0,95	1,13	1,21	1,32	1,05	1,02	1,29
y = Dureza (Rockwell)	386	364	331	353	365	374	341	335	369

a) O fornecedor do aço diz que o teor de carbono deve ser de (1,2 ± 0,08) = (média ± desvio padrão). Calcule a média amostral e o desvio padrão amostral do teor de carbono. Use os valores obtidos, e apenas os seus conhecimentos de Análise Exploratória, para comentar se há evidências contra ou a favor da afirmação do fornecedor.
b) Calcule o coeficiente de correlação entre o teor de carbono e a dureza, interpretando o valor obtido.

Para facilitar: $\sum x_i = 10{,}62 \quad \sum x_i^2 = 12{,}7186 \quad \sum x_i y_i = 3820{,}05$
$\sum y_i = 3218 \quad \sum y_i^2 = 1153430$

3 - Um engenheiro, interessado em estimar o comprimento médio (em cm) de uma peça, observou os seguintes valores de uma amostra aleatória: 1,2; 1,3; 1,2; 1,5. Com base em conhecimentos anteriores, ele verificou que o comprimento dessa peça pode ser modelado por uma distribuição Normal e tem desvio padrão σ = 1 cm.

a) Obtenha a função de verossimilhança L(μ), e determine o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\mu}$ = EMV(μ). De posse da expressão de $\hat{\mu}$, use a amostra e estime μ.
b) Qual o erro quadrático médio EQM($\hat{\mu}$)? O estimador $\hat{\mu}$ é viciado (tendencioso)? Por quê?

4 - Um grande banco deseja inferir sobre a proporção de clientes que estão satisfeitos com seu serviço. Para isto, entrevistou 25 clientes e obteve os resultados mostrados na seguinte lista:

SSISSISSSSSIISSSSSSSISSSSS

em que S representa “cliente satisfeito” e I representa “cliente insatisfeito”.

a) Construa um intervalo de confiança não conservativo ao nível de 96% para a proporção de clientes satisfeitos. O intervalo obtido contém a proporção de clientes satisfeitos?

b) Qual deve ser o tamanho da amostra para que a amplitude do intervalo de confiança conservativo, ao nível de confiança de 98%, seja menor ou igual a 0,04?

5 - Um fabricante de cabos afirma que: “o diâmetro médio dos cabos produzidos pela sua empresa é de pelo menos 5mm”. Para testar se esta afirmação é verdadeira, uma amostra de 25 cabos foi observada e mostrou um diâmetro médio de 4,9mm com um desvio padrão de 0,4mm. Suponha que os diâmetros desses cabos sigam uma distribuição Normal.

a) Explicite as hipóteses a serem testadas e apresente a sua conclusão a um nível de significância de 5%. Justifique a sua resposta.
b) Com base nos recursos de que você dispõe, determine o intervalo de menor amplitude no qual o p-valor se encontra.

Soluções:

1. X=peso de uma pessoa que usa o elevador; $X \sim N(75, 15^2)$
   Seja $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$; $Y \sim N(n\mu=300;\ n\sigma^2=30^2)$

a) $P(Y<\frac{350-300}{30}) = P(Z<1{,}67) = 0{,}9525$

b) $P(Y<lim)=0{,}995 \Rightarrow \frac{lim-300}{30} = 2{,}58$; $lim=377{,}4$

2.

(a) Temos $\bar{X} = \frac{1{,}41+1{,}24+\cdots+1{,}29}{9} = 1{,}18$

$$S_X = \sqrt{\frac{(1{,}41^2+1{,}24^2+\cdots+1{,}29^2)-\frac{(1{,}41+1{,}24+\cdots+1{,}29)^2}{9}}{8}} = 0{,}153$$

Constatamos que $\bar{x} \in [1{,}2 - 0{,}08;\ 1{,}2 + 0{,}08]$, o que conta a favor do fornecedor. Por outro lado, não sabemos de onde vem a margem de erro $\pm$ 0,08. Como o desvio padrão é superior a esse valor, podemos considerar que a amostra apresenta uma variabilidade além da especificada pelo fornecedor, o que é evidência contra a sua afirmação.

(b) Temos $\bar{y} = \frac{386+364+\cdots+369}{9} = 357{,}56$

$$S_Y = \sqrt{\frac{(386^2+364^2+\cdots+369^2)-\frac{(386+364+\cdots+369)^2}{9}}{8}} = 18{,}67$$

$$r_{xy} = \frac{1{,}41\times 386+1{,}24\times 364+\cdots+1{,}29\times 369-9\times 1{,}18\times 357{,}56}{8\times 0{,}153\times 18{,}67} = 0{,}996$$

Pelo valor obtido, nesta amostra há forte correlação positiva entre o teor de carbono e a dureza do aço.

3.

a) X=Comprimento da peça; $X \sim N(\mu,1)$, $f(x)= (2\pi)^{-1/2} \exp(-(x-\mu)^2/2)$;
   $L(\mu) = (2\pi)^{-n/2} \exp(\Sigma-(x_i-\mu)^2/2)$;

   $l(\mu)=\ln(L(\mu))=C- \Sigma(x_i-\mu)^2/2$;

   $l'(\mu)=\Sigma(x_i-\hat{\mu})=0$;
   $\hat{\mu} = \sum x_i/n=\bar{X}$;

para esta amostra $\hat{\mu} = \bar{x} = 1,3$.

b) EQM($\hat{\mu}$)= Var($\bar{X}$) + (B($\bar{X}$))^2 = σ^2/n, porque
E($\bar{X}$)=E(ΣX_i/n)=$n^{-1}\Sigma$E(X)= μ.

Assim, $\hat{\mu}$ é não viciado e B($\bar{X}$)=0;

Var($\bar{X}$) = Var(ΣX_i/n) = (1/n^2) Var(ΣX_i) = (1/n^2) Σ (VarX_i) = σ^2/n

4.

(a) Primeiramente calculamos $\hat{p} = \frac{20}{25}$ = 0,8.

O IC não conservativo ao nível de confiança de 96% será

$$\left[\hat{p} - z_{0,98}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}};\ \hat{p} + z_{0,98}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Pela tabela da Normal obtemos $z_{0,98}$ = 2,05.Substituindo valores, obtemos

$$\left[0,8 - 2,05\sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{25}};\ 0,8 + 2,05\sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{25}}\right] = [0,636;\ 0,964].$$

(b) A amplitude do IC conservativo a 98% é

$$2 \text{ x } \frac{1}{2\sqrt{n}} z_{0,99} = \frac{2,33}{\sqrt{n}}.$$

Assim, devemos ter n $\geq \left(\frac{2,33}{0,04}\right)^2$ = 3393,0625.

Conclusão: A amostra deve ser de tamanho 3394.

5.

(a) μ = diâmetro médio populacional.

H_0: μ ≥ 5mm vs H_1: μ < 5mm

A região crítica é $\bar{x} < \mu_0 - t_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}$, em que $t_{1-\alpha}$ é o (1 – α)-percentil da distribuição t-Student com 24 graus de liberdade. . Como $t_{0,95}$ = 1,711, s = 0,4 e n = 25, a região crítica é

$$\bar{x} < 5 - 1{,}711\text{x}\,\frac{0{,}4}{\sqrt{25}} = 4{,}863.$$

Como $\bar{X}_{obs}$ = 4,9, concluímos, com base nos dados obtidos, que não podemos descartar, ao nível de significância de 5%, a hipótese de que o diâmetro médio dos cabos seja, na verdade, maior ou igual a 5mm.

(b) O p-valor é $\tilde{\alpha} = P\left(T < \frac{4{,}9-5}{0{,}4/\sqrt{25}}\right) = P(T < -1{,}25)$,

onde T ~ t-Student com 24 g.l.

Consultando a tabela da t na linha correspondente a 24 g.l., vemos que

$P(T < 0{,}857) = 0{,}8$ e $P(T < 1{,}318) = 0{,}9$.

Como $-1{,}318 < -1{,}25 < -0{,}857$, concluimos que

$1 - 0{,}9 = P(T < -1{,}318) < \tilde{\alpha} < P(T < -0{,}857) = 1 - 0{,}8$,

Ou seja, $0{,}1 < \tilde{\alpha} < 0{,}2$.