UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos
Probabilidade e Estatística - Estatística

Prova # 01 — 13-12-2012

Enunciados e soluções

1. Para competir em uma certa regata as embarcações podem velejar com no máximo 4 tripulantes. Os tripulantes de cada embarcação são inscritos previamente e não podem ser alterados mais tarde. A embarcação *Chez Moi*, participante da regata, inscreveu Alberto, Bernardo, Carlos e Diogo. Carlos e Diogo confirmaram a presença na regata com probabilidade 100%. A probabilidade de Alberto comparecer à regata é 50%, enquanto que a de Bernardo, é 70%. A decisão de comparecer ou não por parte de Alberto não influencia a decisão de comparecer ou não por parte de Bernardo e vice-versa. Note que o fato do número de velejadores no barco poder ser igual a 2, 3 ou 4 caracteriza uma partição do espaço amostral.

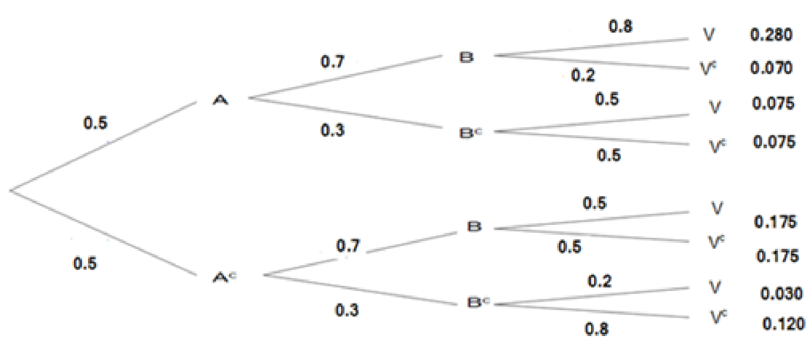
   Com a tripulação completa, a embarcação *Chez Moi* tem 80% de probabilidade de vencer a regata; com apenas Carlos e Diogo, esta probabilidade cai para 20%; e com três tripulantes a probabilidade de vencer é de 50%. Pede-se calcular a probabilidade de que

   (a) pelo menos um dos velejadores, Alberto ou Bernardo, compareçam à regata; **(b)** a embarcação *Chez Moi* vença a regata; **(c)** pelo menos um dos velejadores, Alberto ou Bernardo, tenham comparecido à regata condicionado ao fato de que a embarcação *Chez Moi* venceu a regata. Compare suas respostas dadas nos itens (a) e (c). A probabilidade aumentou ou diminuiu? Por que?

   (a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B)$, pois os eventos A e B são independentes. Logo,

$$P(A \cup B) = 0,5 + 0,7 - 0,5 * 0,7 = 1,2 - 0,35 = 0,85.$$

   (b) $P(V) = P\left([V \cap (A \cap B)] \cup [V \cap \{(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)\}] \cup [V \cap (A^c \cap B^c)]\right)$
   $= P\left([V \cap (A \cap B)]\right) + P\left([V \cap \{(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)\}]\right) + P\left([V \cap (A^c \cap B^c)]\right)$
   $P\left(V \cap (A \cap B)\right) = P(A \cap B) * P(V|A \cap B) = 0,5 * 0,7 * 0,8 = 0,28$
   $P\left(V \cap (A^c \cap B^c)\right) = P(A^c \cap B^c) * P(V|A^c \cap B^c) = 0,5 * 0,3 * 0,2 = 0,03$
   $P\left([V \cap \{(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)\}]\right) = P\left(V \cap \{(A^c \cap B)\right) + P((V \cap \{(A \cap B^c)) =$
   $= P(A^c \cap B) * P(V|A^c \cap B) + P(A \cap B^c) * P(V|A \cap B^c) = 0,5*0,7*0,5 + 0,5*0,3*0,5 = 0,25$
   Logo, $P(V) = 0,28 + 0,25 + 0,03 = 0,56.$



   (c) $P(A \cup B|V) = \dfrac{P([A \cup B] \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,355 + 0,455 - 0,28}{0,56} = \dfrac{0,53}{0,56} =\simeq 0,95.$

A probabilidade de que pelo menos um entre Alberto e Bernardo tenham comparecido à regata aumentou. O evento "vencer a regata" é favorável ao evento "presença de pelo menos um dos dois". Ou, equivalentemente, o evento "presença de pelo menos um dos dois" é favorável à ocorrência do evento "vencer a regata". Podemos concluir que os eventos $A \cup B$ e V não são independentes.

2. Um supermercado faz a seguinte promoção: o cliente, ao passar pelo caixa, lança um dado honesto. Se sair face "6" ele ganha um desconto de 30% sobre o total de sua compra. Se sair face "5", o desconto é de 20%. Se sair face "4", o desconto é de 10% e, se sair faces "1", "2" ou "3", o desconto é de 5%. Seja X a variável aleatória definida como o desconto concedido ao cliente na promoção. Pede-se

(a) a função de probabilidade da variável alaeatória X; **(b)** o desconto médio concedido na promoção; **(c)** a probabilidade de que num grupo de 5 clientes, pelo menos um obtenha um desconto maior do que 10%.

(a) O conjunto de valores possíveis para a variável aleatória X é $\mathsf{R}_X = \{5\%, 10\%, 20\%, 30\%\}$. Logo, $p_X(x) = 0$ para todo $x \notin \mathsf{R}_X$. Basta, então, especificar as probabilidades para cada valor possível de X. Como o dado é honesto, temos que a probabilidade de sair cada uma das seis faces do dado é 1/6. Logo,

X	$p_X(x)$
5%	3/6=1/2
10%	1/6
20%	1/6
30%	1/6
total	1

(b)

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{x \in \mathsf{R}_X} x p_X(x) = \frac{3 * 5\% + 10\% + 20\% + 30\%}{6} = 12,5\%$$

(c) A probabilidade p de obter um desconto maior do que 10% é

$P(X > 10\%) = P(X = 20\%) + P(X = 30\%) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Seja Y o número de clientes entre os 5 considerados que obtiveram desconto maior que 10%.

$$Y \sim \mathsf{Binomial}\left(5, \frac{1}{3}\right)$$

tal que

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{243 - 32}{243} = \frac{211}{243} \simeq 0,8683.$$

3. O tempo de espera (em minutos) para ser atendido em um sistema de conversa *on-line* de uma empresa comporta-se de acordo com a seguinte função de densidade $f(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3}, & t \geq m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

(a) Determine o valor de m. **(b)** Calcule a probabilidade de um cliente esperar pelo menos 5 minutos dado que já esperou pelo menos 2 minutos. **(c)** O administrador do sistema afirmou que 96% dos usuários esperam no máximo 5 minutos para serem atendidos. Você concorda com o administrador? Justifique a sua resposta.

(a)

$$1 = \int_m^{\infty} 2t^{-3}dt \quad \leftrightarrow (-t^{-2})|_m^{\infty} = 1 \quad \leftrightarrow \frac{1}{m^2} = 1.$$

Logo, $m = 1$ minuto, pois não faz sentido neste contexto um valor negativo para m.

(b)

$$P(X \geq 5|X \geq 2) = \frac{P(X \geq 5)}{P(X \geq 2)} = \frac{1/25}{1/4} = \frac{4}{25}.$$

(c)

$$F(5) = P(X \leq 5) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} = 0,96,$$

logo, concordo com o administrador.

4. Considerando a população dos profissionais à busca de emprego em uma certa fatia do mercado de trabalho, há duas habilidades consideradas importantes para se ter sucesso: dominar o Inglês e dominar a Informática. Sabe-se que:

(i) a proporção de profissionais que dominam o Inglês é igual a proporção de profissionais que dominam a Informática (denote por p essa proporção comum às duas habilidades); **(ii)** o número médio de habilidades por profissional é 1,4; **(iii)** a variância desse número de habilidades por profissional é 0,24.

Calcule

(a) o valor de p; **(b)** o coeficiente de correlação ρ entre dominar o Inglês e dominar a Informática;

(c) a proporção q de profissionais que possuem ao mesmo tempo as duas habilidades.

Sugestão: Defina as variáveis aleatórias

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o profissional domina o Inglês} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \text{ e } Y = \begin{cases} 1, & \text{se o profissional domina a Informática} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

O número total de habilidades que um profissional possui é dado por $X + Y$.

Com base nas informações fornecidas, a distribuição conjunta de X e Y é:

$X \searrow Y$	0	1	$p_X(x)$
0	$1 - 2p + q$	$p - q$	$1 - p$
1	$p - q$	q	p
$p_Y(y)$	$1 - p$	p	1

a) Já que X e Y são Bernoulli(p), $\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(Y) = p$ e $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(Y) = p(1-p)$.

$$1,4 = \mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y) = p + p = 2p.$$

Logo, $p = 0,7$.
Então, $\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(Y) = 0,7$ e $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(Y) = 0,7x0,3 = 0,21$.
b)

$$0,24 = \mathsf{Var}(X+Y) = \mathsf{Var}(X) + \mathsf{Var}(Y) + 2\mathsf{Cov}(X,Y)$$

implica que

$$\mathsf{Cov}(X,Y) = \frac{\mathsf{Var}(X+Y) - \mathsf{Var}(X) - \mathsf{Var}(Y)}{2} = \frac{0,24 - 2*0,21}{2} = -0,09$$

$\mathsf{DP}(X) = \mathsf{DP}(Y) = \sqrt{0,21}$.
Logo,

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{-0,09}{0,21} = -\frac{3}{7}.$$

c) $XY = 1$ se e só se $X = 1$ e $Y = 1$. Caso contrário, $XY = 0$.
Então XY é Bernoulli(q). Logo $\mathsf{E}(XY) = q$.
Por outro lado, sabemos que $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{Cov(X,Y)} + \mathsf{E}(X)\ \mathsf{E}(Y) = -0,09 + 0,7x0,7 = 0,4$.

$$\text{Então } q = 0,4.$$