Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
1ª Prova de Estatística Unificada

Turma: Engenharia   Data: 19/04/2012

---

1. Em um curso secundário, 1/3 dos estudantes são do sexo masculino e 2/3 dos estudantes são do sexo feminino. Entre os rapazes, 20% estudam ciências, enquanto entre as moças, apenas 10% dedicam-se às ciências. Obtenha as probabilidades de que
   (a) um estudante escolhido ao acaso estude ciências;
   (b) um estudante de ciências selecionado ao acaso seja do sexo feminino.

2. Sabe-se que ocorre, em média, um acidente por dia numa certa estrada. Além disso, o número de ocorrências de acidentes ao longo de um intervalo de tempo de duração fixa segue uma distribuição de Poisson. Calcular a probabilidade de que:
   (a) num determinado dia ocorressem pelo menos 3 acidentes. (calcule o resultado com 2 casas decimais);
   (b) num grupo de 4 dias houvesse exatamente 2 dias, dos 4 selecionados, com pelo menos 3 acidentes por dia.

   Obs.: Para simplificar os seus cálculos, use nas contas os valores (aproximados) que constam na tabela abaixo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-x}	1	0,3678	0,1353	0,0497	0,0183	0,0067	0,0024	0,0009	0,0003	0,0001	$4{,}5\times10^{-5}$

3. O valor exato de uma certa grandeza, expresso em uma unidade apropriada, é igual a μ, onde $\mu > 0$. Quando essa grandeza é medida com o uso de um determinado instrumento, o resultado da medição se comporta como uma variável aleatória X, que segue uma distribuição Normal(μ; σ^2). O erro relativo correspondente a essa medição é $|X - \mu|/\mu$. A probabilidade de que esse erro relativo seja maior que 0,5 é igual a 0,02.
   (a) Qual é o valor de μ, se $\sigma = 2$?
   (b) Qual é o valor de σ, se $\mu = 6,99$?

   Obs.: Nesta questão os cálculos devem ser efetuados sempre com duas casas decimais.

4. Seja V a velocidade, medida em m/s, de um objeto de massa m = 5 kg em movimento retilíneo. Suponha que V é uma variável aleatória contínua com densidade

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} - \dfrac{|v|}{25}, & \text{se } -5 < v < 5, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Calcule o valor esperado da energia cinética $W = \dfrac{mV^2}{2}$.
   (b) O objeto permanece com velocidade V durante 8 segundos, percorrendo X = 8V metros. Calcule a variância de X.

5. Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 bolas vermelhas. Um experimento consiste em se extrair sequencialmente e sem reposição duas bolas e registrar suas cores. Seja X a v.a. que representa o número de bolas brancas retiradas nas duas extrações e seja Y a v.a. que assume 1 se a primeira bola extraída é branca e 0 se a primeira bola extraída é vermelha.
   (a) Obtenha a distribuição conjunta de X e Y através de uma tabela e diga se X e Y são independentes, justificando. Sugestão: Na montagem da tabela, comece determinando as distribuições marginais de X e de Y. Em seguida, obtenha $P(X = 0, Y = 1)$ e $P(X = 2, Y = 0)$. Finalmente complete a tabela, respeitando as propriedades de uma distribuição conjunta.
   (b) Calcule a covariância de X e Y.

Respostas

1. Definimos os eventos

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{o estudante é de sexo feminino}\} \\ B &:= \{\text{o estudante estuda ciências}\}. \end{aligned}$$

   (a) Usamos a fórmula da probabilidade total:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{1}{10}.\frac{2}{3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

   (b) Usamos a fórmula de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{1/10 \times 2/3}{2/15} = \frac{1}{2}.$$

2. (a) Seja $X :=$ número de acidentes em um dia, assim, $X \sim Pois(1)$,

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-1}(1 + 1 + 1^2/2) = 0,0805 \approx 0,08$$

   (b) Seja $Y :=$ número de dias, entre os 4 selecionados, com pelo menos 3 acidentes; assim, $Y \sim Binom(n = 4, p = 0,08)$;

$$P(Y = 2) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) 0,08^2\ 0,92^2 = 0,0325$$

3. Sabemos que $P(|X - \mu|/\mu > 0,5) = 0,02$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade por μ/σ, obtemos $P(|X - \mu|/\sigma > 0,5\mu/\sigma) = 0,02$.
Por outro lado, como $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0;1)$, concluímos que $0,5\mu/\sigma = z_{0,99} = 2,33$, consultando a tabela da distribuição Normal padrão.

   (a) Se $\sigma = 2$, então $\mu = 2 \times 2,33/0,5 = 9,32$.

   (b) Se $\mu = 6,99$, então $\sigma = 0,5 \times 6,99/2,33 = 1,50$.

4. (a)

$$\begin{aligned} E[W] = &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{2} v^2 f(v) dv = \frac{5}{2} \int_{-5}^{+5} v^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{|v|}{25} \right) dv \\ = &\ 5 \int_{0}^{+5} \left(\frac{v^2}{5} - \frac{v^3}{25} \right) dv = 5 \left[\frac{v^3}{15} - \frac{v^4}{100} \right]_0^5 = \frac{625}{60} \text{kg } m^2/s^2 = 10,42 \text{ Joules.} \end{aligned}$$

   (b) Seja X a distância percorrida pelo objeto, então

$$E[X] = E[8V] = 8E[V] = 8 \cdot 0 = 0\,,$$

   já que a densidade de V é simétrica em torno de 0 ($E[|V|] < \infty$). Assim,

$$Var[X] = 8^2\, Var[V] = 64\, E[V^2] = 64\, \frac{2}{5}\, E[W] = \frac{128}{5}\, \frac{625}{60} = \frac{800}{3} = 266,67 m^2.$$

5. (a) A tabela da distribuição conjunta é dada a seguir.

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{2}{5}$
1	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
$P(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

Por exemplo,

$$P(X = 1, Y = 0) = P(V1 \cap B2) = P(V1)P(B2|V1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10},$$

onde $V1 =$"a primeira bola extraída é vermelha"e $B2 =$"a segunda bola extraída é branca".

As variáveis aleatórias X e Y não são independentes, pois

$$P(X = 2, Y = 0) = 0 \neq \frac{3}{10}\,\frac{2}{5} = P(X = 2)P(Y = 0).$$

(b) $Cov(X, Y) = E(XY) - EXEY = 9/10 - (6/5) \times (3/5) = 9/50$, pois

$$\begin{aligned} &EXY = 1 \times 1 \times 3/10 + 2 \times 1 \times 3/10 = 9/10. \\ &EX = 1 \times 3/5 + 2 \times 1 \times 3/10 = 6/5. \\ &EY = 1 \times 3/5 = 3/5. \end{aligned}$$