UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Primeira Avaliação de Probabilidade e Estatística **26-04-2018**
Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa.
Resolver as questões nos espaços apropriados.

1. Para estudar o comportamento do mercado de smartphones, as marcas foram divididas em três categorias: marca S, marca I e marca L. Um estudo sobre os hábitos de mudança de marca por parte dos usuários mostrou que o seguinte quadro de probabilidades condicionais prevalece em qualquer momento no qual um usuário típico adquire um novo aparelho:

Proprietário da marca	Mudança para S	Mudança para I	Mudança para L
S	0,55	0,25	0,20
I	0,20	0,60	0,20
L	0,35	0,30	0,35

Por exemplo: Para i=1,2,...; $P(S_{i+1}|S_i)=0{,}55$; $P(L_{i+1}|S_i)=0{,}20$; $P(S_{i+1}|L_i)=0{,}35$.
A compra do primeiro smartphone é feita conforme as probabilidades a seguir: $P(S_1)=0{,}60$; $P(I_1)=0{,}25$ e $P(L_1)=0{,}15$.
Calcule as probabilidades de um usuário:

(a) Comprar o seu segundo smartphone de cada uma das marcas: $P(S_2)$, $P(I_2)$ e $P(L_2)$;
(b) Comprar o seu terceiro smartphone da marca S, ou seja, $P(S_3)$;
(c) Ter comprado o seu primeiro smartphone da marca S, dado que o segundo também foi da marca S, ou seja, $P(S_1|S_2)$.

2. Seja X uma variável aleatória discreta que corresponde à durabilidade de uma peça, em anos incompletos. A função de distribuição acumulada de X é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0\,, \\ 1/2 & \text{se } 0 \leq x < 1\,, \\ 3/5 & \text{se } 1 \leq x < 2\,, \\ 4/5 & \text{se } 2 \leq x < 3\,, \\ 9/10 & \text{se } 3 \leq x < 4\,, \\ 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

(a) Determine a função de probabilidade de X.
(b) A grandeza $Y = 2\sqrt{X} + 3$ é considerada uma característica de qualidade importante do processo de produção. Calcule o valor esperado de Y.
(c) A durabilidade de uma peça similar produzida por meio de um novo processo de fabricação é W. Se W é uma Poisson de parâmetro 2, independente de X, calcule a probabilidade de que uma peça produzida pelo novo processo dure menos que uma peça produzida pelo processo original, ou seja, $P(W < X)$.

3. Numa linha de produção o número de peças defeituosas em 1 dia de operação da fábrica pode ser modelado por uma distribuição de Poisson com taxa média de ocorrência de 6 peças defeituosas por dia.

(a) Seja T o intervalo de tempo, em dias, entre duas ocorrências sucessivas da fabricação de itens defeituosos. Forneça a expressão matemática da função de densidade de T. Deduza através de integração a expressão matemática da função de distribuição acumulada de T.
(b) Qual a probabilidade de que T esteja entre 8 e 12 horas?
(c) Determine a amplitude de um intervalo de tempo para que a probabilidade de nenhuma peça defeituosa ser produzida ao longo dele seja de 90%.

4. Considere a distribuição conjunta de X e Y, parcialmente conhecida, dada pela tabela abaixo.

(a) Complete a tabela, considerando X e Y independentes.
(b) Calcule as médias e variâncias de X e Y.
(c) Calcule $P(X + Y = 1|XY = 0)$.

Y \ X	-1	1	$P(Y = y)$
-1	1/12		
0			1/3
1	1/4	1/4	
$P(X = x)$			1

Boa Prova!

Solução

1. P(S_1)=0,60; P(I_1)=0,25 e P(L_1)=0,15

   (a) $P(S_2) = P(S_2|S_1)P(S_1) + P(S_2|I_1)P(I_1) + P(S_2|L_1)P_(L1) = (0,55)(0,60) + (0,20)(0,25) + (0,35)(0,15) = 0,433$
   $P(I_2) = P(I_2|S_1)P(S_1) + P(I_2|I_1)P(I_1) + P(I_2|L_1)P(L_1) = (0,25)(0,60) + (0,60)(0,25) + (0,30)(0,15) = 0,345$
   $P(L_2) = P(L_2|S_1)P(S_1) + P(L_2|I_1)P(I_1) + P(L_2|L_1)P(L_1) = (0,20)(0,60) + (0,20)(0,25) + (0,35)(0,15) = 0,223$

   (b) $P(S_3) = P(S_3|S_2)P(S_2) + P(S_3|I_2)P(I_2) + P(S_3|L_2)P(L_2)$
   Logo, $P(S_3) = (0,55)(0,433) + (0,20)(0,345 + (0,35)(0,233) = 0,385$

   (c) Como, $P(S_1|S_2) = \frac{P(S_2|S_1) \times P(S_1)}{P(S_2)} = \frac{(0,55)(0,60)}{0,433} \approx 0,763$

2. (a)

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
P(X=k)	0.5	0.1	0.2	0.1	0.1

   (b) $E[\sqrt{X}] = 0 \times 0.5 + 1 \times 0.1 + \sqrt{2} \times 0.2 + \sqrt{3} \times 0.1 + 2 \times 0.1 = 0,7560$
   $E(Y) = 2 \times E[\sqrt{X}] + 3 = 4,512$

   (c) $P(Y < X) = P(Y = 0)P(1 \leq X \leq 4) + P(Y = 1)P(2 \leq X \leq 4) + P(Y = 2)P(3 \leq X \leq 4) + P(Y = 3)P(X = 4)$
   $P(Y < X) = e^{-2} \times 0,5 + 2e^{-2} \times 0,4 + 2e^{-2} \times 0,2 + \frac{4}{3}e^{-2} \times 0.1 = 1,8333 \times e^{-2} = 0,2481$

3. (a) A v.a.T $\sim Exp(\lambda = 6)$. Então, f(t)=$\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$
   $F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\lambda t} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$

   (b) Como a unidade é dia, 8h=8/24 = 1/3 dias e 12h = 1/2 dias.
   $P(1/3 \leq T \leq 1/2) = F(1/2) - F(1/3) = e^{-2} - e^{-3} \approx 0,135 - 0,050 = 0,085$

   (c) $P(T > t_0) = 0,9 = e^{-6t_0}$. Assim, $t_0 = \frac{-log(0,90)}{6} \approx 0,0176 dias \approx 0,42 horas \approx 25 min.$

4. (a) Como X e Y são independentes,

$$P(X = -1, Y = 0) = P(X = -1)P(Y = 0) = (1/3)P(X = -1),$$

   onde na segunda igualdade usamos que $P(Y = 0) = 1/3$.
   Desso modo, podemos determinar o valor de $P(X = -1)$ como segue:

$$\begin{aligned} P(X = -1) &= P(X = -1, Y = -1) + P(X = -1, Y = 0) + P(X = -1, Y = 1) \\ &= 1/12 + (1/3)P(X = -1) + 1/4 \\ &= 1/3 + (1/3)P(X = -1), \end{aligned}$$

   e daí segue que $P(X = -1) = 1/2$, implicando que $P(X = -1, Y = 0) = 1/6$. Além disso, usando que $P(X = 1) = 1 - P(X = -1)$ segue que $P(X = 1) = 1/2$, de modo que $P(X = 1, Y = 0) = (1/2)(1/3) = 1/6$. De maneira similar, podemos concluir também que $P(X = 1, Y = -1) = 1/12, P(Y = 1) = 1/2$ e $P(Y = -1) = 1/6$.
   Em resumo, assumindo independência de X e Y, os valores da tabela seriam os seguintes:

Y \ X	-1	1	$P(Y = y)$
-1	1/12	1/12	1/6
0	1/6	1/6	1/3
1	1/4	1/4	1/2
$P(X = x)$	1/2	1/2	1

   (b) Da tabela acima, temos

$$\begin{cases} E(X) = (-1)P(X = -1) + (1)P(X = 1) = 0, \\ \text{Var}(X) = E(X^2) = (-1)^2 P(X = -1) + (1)^2 P(X = 1) = 1, \\ E(Y) = (-1)P(Y = -1) + (1)P(Y = 1) = -1/6 + 1/2 = 1/3, \\ \text{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 2/3 - (1/3)^2 = 5/9. \end{cases}$$

   (c) Da tabela segue que $P(X + Y = 1|XY = 0) = \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$.