UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Primeira Avaliação de Probabilidade e Estatística 21-09-2017

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa.
Resolver as questões nos espaços apropriados.

1. Um trabalhador pediu a seu supervisor uma carta de recomendação para um novo emprego. Ele estima que há 80% de chances de que obtenha o trabalho se receber uma excelente (E) recomendação, 40% de chance se a recomendação for moderadamente boa (M), e 10% de chance se a recomendação for fraca (F). Pelo que o trabalhador conhece da avaliação do supervisor, ele ainda estima que as probabilidades da recomendação ser excelente(E), moderada(M) e fraca(F) são 70%, 20%, e 10%, respectivamente. Calcule a probabilidade:

   (a) de que ele vá receber a oferta de trabalho (T);

   (b) da recomendação ter sido Excelente, Moderada e Fraca dado que ele tenha recebido a oferta de trabalho;

   (c) da recomendação ter sido Excelente, Moderada e Fraca dado que ele não tenha recebido a oferta de trabalho;

   (d) As probabilidades originais de 70%, 20%, e 10%, respectivamente estimadas para recomendação ser excelente(E), moderada(M) e fraca(F) foram alteradas nos itens (b) e (c) ora para mais, ora para menos em função do resultado que elas produziram. Como você explica a lógica destas modificações?

2. Uma empresa faz transporte de material por meio de caminhões e o volume de encomendas que ela recebe oscila ao longo do tempo. Admita que, escolhendo ao acaso um dia de trabalho:

   - O número de entregas a serem feitas segue uma distribuição de Poisson com média de 5 entregas/dia;
   - A empresa pode contratar, por empreitada, trabalhadores autônomos que constam de uma lista de 6 nomes. Todos eles tem a mesma chance p de virem a ser contratados para servir à empresa naquele dia, e há independência entre as decisões de se contratar ou não relativas aos diversos trabalhadores da lista;
   - O número de caminhões usados para realizar os serviços naquele dia pode ser igual a: 1 (com probabilidade 0,15), 2 (com probabilidade 0,60), ou 3 (com probabilidade 0,25).

   Pergunta-se:

   (a) Qual é a probabilidade de que nesse dia sejam feitas no máximo 4 entregas, dado que ocorrerão pelo menos 3 entregas?

   (b) Quais são os valores possíveis de p, se a probabilidade de serem recrutados exatamente 3 empregados da lista de 6 é igual a 0,27648?

   (c) Qual é o coeficiente de variação do número de caminhões a serem usados naquele dia?

3. O tempo (em horas) necessário para reparar uma máquina é uma variável aleatória T_1 Exponencialmente distribuída com parâmetro $\lambda = 1/2$.

   (a) Deduza, usando integração, a Função de Distribuição Acumulada(FDA) da v.a. $T_1 \sim$ Exponencial(λ). Calcule a probabilidade de um tempo de reparo exceder a 1 hora.

   (b) Calcule a probabilidade condicional de que um reparo demore pelo menos 9 horas, dado que já demorou mais de 8 horas. Que propriedade da distribuição Exponencial relaciona a resposta deste item com a do item(a)?

   (c) Calcule a Mediana (q_2) e Distância Interquartil (DIQ) de T_1.

   (d) Suponha agora que a distribuição do tempo (T_2) de reparo não seja mais Exponencial, mas que possa ser modelada por uma Normal com os mesmos parâmetros Média e Variância da Exponencial T_1. Nesta nova condição calcule $P(T_2 > 1)$, Mediana(T_2) e DIQ(T_2).

4. Uma moeda equilibrada é lançada duas vezes. Uma cara é associada ao número 1 e uma coroa, ao número 0. O par de variáveis aleatórias (X, Y) é definido como:

$$X = \text{ resultado do primeiro lançamento } + \text{ resultado do segundo lançamento}$$
$$Y = \text{ resultado do primeiro lançamento } - \text{ resultado do segundo lançamento}$$

   (a) Encontre a função de probabilidade conjunta do par (X, Y).

   (b) Encontre as distribuições marginais de X e Y.

   (c) Calcule a covariância entre X e Y.

   (d) X e Y são independentes? Justifique sua resposta.

Boa Prova!

Solução

1. Sejam os eventos: E=Recomendação Excelente, M=Recomendação Moderada e F= Recomendação Fraca;
   T = Obter o Trabalho;
   São dadas as probabilidades: P(T|E) = 0,8; P(T|M) = 0,4 e P(T|F) = 0,1.

   (a) P(T) = P(T|E)×P(E) + P(T|M)×P(M) + P(T|F)×P(F) = 0,8×0,7+0,4×0,2+0,1×0,1 = 0,65 = 13/20.

   (b) P(E|T) = $\frac{P(T|E)\times P(E)}{P(T)} = \frac{0{,}8\times 0{,}7}{0{,}65} = \frac{56}{65} \approx 0,862$
   P(M|T) = $\frac{P(T|M)\times P(M)}{P(T)} = \frac{0{,}4\times 0{,}2}{0{,}65} = \frac{8}{65} \approx 0,123$
   P(F|T) = $\frac{P(T|F)\times P(F)}{P(T)} = \frac{0{,}1\times 0{,}1}{0{,}65} = \frac{1}{65} \approx 0,015$.

   (c) P(E|T^c) = $\frac{P(T^c|E)\times P(E)}{P(T^c)} = \frac{(1-0{,}8)\times 0{,}7}{0{,}35} = \frac{14}{35} = 0,4$
   P(M|T^c) = $\frac{P(T^c|M)\times P(M)}{P(T^c)} = \frac{(1-0{,}4)\times 0{,}2}{0{,}35} = \frac{12}{35} \approx 0,343$
   P(F|T^c) = $\frac{P(T^c|F)\times P(F)}{P(T^c)} = \frac{(1-0{,}1)\times 0{,}1}{0{,}35} = \frac{9}{35} \approx 0,257$.

   (d) Observamos que condicionando no evento T, "Obtenção do Trabalho", aumenta a probabilidade do evento ser E, "Recomendação Excelente". Mas, diminui a do evento ser M, "Recomendação Moderada", e diminui expressivamente a do evento ser F, "Recomendação Fraca". Isto ocorre porque, se a avaliação for excelente, há grande chance de obtenção do emprego; se a avaliação for moderadamente boa, essa chance é média; e se a avaliação for fraca, há muito pouca chance de sucesso na obtenção do emprego. Contrariamente, observarmos que condicionando no evento T^c, "a **não** obtenção do trabalho", tudo se comporta de maneira oposta, pelos mesmos motivos acima expostos.

2. (a) Seja E o número de entregas do dia. Então E $\sim$ Poisson($\lambda = 5$).
   Logo, $P(E \leq 4 \mid E \geq 3) = \frac{P(3\leq E\leq 4)}{P(E\geq 3)} = \frac{P(E=3)+P(E=4)}{1-P(E\leq 2)} = \frac{e^{-5}\left(\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}\right)}{1-e^{-5}\left(1+5+\frac{5^2}{2!}\right)} = 0,361.$

   (b) Seja T o número de trabalhadores autônomos contratados no dia.
   Então, T $\sim$ Binomial(n = 6; p) e P(T = 3) = 0,27648.
   Mas, P(T = 3) = 20 $p^3(1-p)^3 = 20[p(1-p)]^3$.
   Portanto,$p(1-p) = (\frac{0{,}27648}{20})^{1/3} = 0,24$, o que nos leva à equação do 2º grau:
   $p^2 - p + 0,24 = 0$, cujas soluções são p = 0,6 e p = 0,4, ambas válidas.

   (c) Seja C o número de caminhões a serem usados nesse dia. Então:
   P(C = 1) = 0,15, P(C = 2) = 0,60, P(C = 3) = 0,25. Portanto:
   E(C) = 1 x 0,15 + 2 x 0,60 + 3 x 0,25 = 2,1
   Var(C) = $1^2 \times 0,15 + 2^2 \times 0,60 + 3^2 \times 0,25 - 2,1^2 = 0,39$ e
   DP(C) = $\sqrt{0,39}$ = 0,6245. Finalmente, CV(C) = $\frac{0{,}6245}{2{,}1} = 0,297$

3. Seja T_1= Tempo de reparo da máquina;

   (a) $T_1 \sim Exp(\lambda)$, F(t)=$\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}dt$, seja $u = \lambda t$ e $du = \lambda dt$.
   Assim, $F(t) = 0 + [-e^{-u}]_0^{\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$, se $t > 0$.
   $T_1 \sim Exp(\lambda = 1/2)$, então $F(t) = 1 - e^{-t/2}$. Assim, $P(T_1 > 1) = 1 - F(1) = e^{-1/2} = 0,607$.

   (b) $P(T_1 > 9|T_1 > 8) = \frac{P(T_1>9)}{P(T_1>8)} = \frac{e^{-(1/2)\times 9}}{e^{-(1/2)\times 8}} = e^{-1/2} = 0,607$. Ora, como vimos no item (a),
   P(T_1 > 9 − 8) = P(T_1 > 1) = 0,607.
   O nome desta propriedade da v.a. Exponencial é a "perda de memória (Memoryless)".

   (c) $F(t) = 1 - e^{-t/2}$. Então, $F(q_1) = 0.25 = 1 - e^{-q_1/2}$, $F(q_2) = 0.50 = 1 - e^{-q_2/2}$ e $F(q_3) = 0.75 = 1 - e^{-q_3/2}$.
   Assim,
   $q_1 = -2ln(0,75) = 0,75$; $q_2 = -2ln(0,50) = 1,386$; $q_3 = -2ln(0,25) = 2,773$; $DIQ = q_3 - q_1 = 2,198$.

   (d) Agora, $T_2 \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$, porque E(T$_1$) = $1/\lambda = 1/(1/2) = 2$ e Var(T$_1$) = $1/\lambda^2 = 1/(1/4) = 4$. . Assim,
   $P(T_2 > 1) = P(Z > \frac{1-\mu}{\sigma}) = P(Z > -1/2) = \Phi(1/2) = 0,6915$.
   Usaremos a busca inversa na tabela da N(0, 1) para determinação dos quartis: z_1, z_2 e z_3
   $\Phi(z_1) = 0,25 \Longrightarrow z_1 = -0,67 \Longrightarrow q_1 = 2 \times z_1 + 2 = 0,66$; $q_2 = \mu = 2$;
   $\Phi(z_3) = 0,75 \Longrightarrow z_3 = \ 0,67 \Longrightarrow q_3 = 2 \times z_3 + 2 = 3,34$; e $DIQ = 3,34 - 0,66 = 2,68$

4. (a) Denotemos a saída de uma cara por K e de uma coroa por C. Dessa forma X pode assumir os valores 0 (CC), 1 (CK ou KC) e 2 (KK), enquanto que Y pode assumir os valores -1 (CK), 0 (CC ou KK) e 1 (KC). Assim, o par (X, Y) só pode assumir os valores $(0, 0)$ (CC, com probabilidade 1/4), $(1, -1)$ (CK, com probabilidade 1/4), $(1, 1)$ (KC, com probabilidade 1/4) e $(2, 0)$ (KK, com probabilidade 1/4).

	Y			$\Pr(X = x)$
X	-1	0	1	
0	0	1/4	0	1/4
1	1/4	0	1/4	1/2
2	0	1/4	0	1/4
$\Pr(Y = y)$	1/4	1/2	1/4	1

(b) Do item anterior, temos que $P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 1) = 1/2$ e $P(X = 2) = 1/4$; enquanto que $P(Y = -1) = 1/4$, $P(Y = 0) = 1/2$ e $P(Y = 1) = 1/4$.

(c) Sabemos que $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$. Temos então que:
$E[XY] = \sum_{(x,y)} xyP(X = x, Y = y) = 0 \times 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times -1 \times \frac{1}{4} + 1 \times 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times 0 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$
$E[X] = \sum_x xP(X = x) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
$E[Y] = \sum_y yP(Y = y) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$
Dessa forma, temos que:
Cov(X,Y) $= E[XY] - E[X]E[Y] = 0 - 1 \times 0 = 0.$

(d) Não, pois se o fossem, teríamos, por exemplo, que o par $(0, -1)$ poderia ser assumido, com probabilidade igual a $1/16$, pois nesse caso a função de probabilidade conjunta seria o produto das funções de probabilidade marginais. Como sabemos que p(0,$-$1)=0 (vide descrição no item a), as variáveis aleatórias não são independentes.