UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos
Probabilidade e Estatística - Estatística

Prova #1 30-09-2014

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa: as expressões que levaram a alguma resposta numérica devem ser indicadas nos espaços apropriados.

---

1. Três companhias aéreas servem uma pequena cidade no estado de São Paulo. As companhias A, B e C tem, respectivamente, 50%, 30% e 20% dos voos programados. As taxas de voos que saem no horário programado são 80%, 65% e 40%, respectivamente.

   (a) Um voo acaba de sair no horário programado. Qual é a probabilidade que seja da companhia C?

   (b) Qual é a probabilidade de um voo não ser da companhia B ou não sair no horário programado?

   (a) Defina A como o evento o voo ser da companhia A, e os eventos B e C de forma semelhante. Defina H como o evento o voo sair no horário programado. Temos que $\Pr(A) = 0,5$, $\Pr(B) = 0,3$ e $\Pr(C) = 0,2$. Além disso, $\Pr(H|A) = 0,8$, $\Pr(H|B) = 0,65$ e $\Pr(H|C) = 0,4$. Estamos interessados em $\Pr(C|H)$. Logo,

$$\begin{aligned}\Pr(C|H) &= \frac{\Pr(H|C)\Pr(C)}{\Pr(H|A)\Pr(A) + \Pr(H|B)\Pr(B) + \Pr(H|C)\Pr(C)} \\ &= \frac{0,4 \times 0,2}{0,5 \times 0,8 + 0,3 \times 0,65 + 0,4 \times 0,2} = 0,1185 \simeq 0,12.\end{aligned}$$

   (b) Definidos os eventos no ítem anterior, estamos interessados em $\Pr(B^c \cup H^c)$. Segue-se que

$$\begin{aligned}\Pr(B^c \cup H^c) &= \Pr\left((B \cap H)^c\right) = 1 - \Pr(B \cap H) \\ &= 1 - \Pr(H|B)\Pr(B) = 1 - 0,65 \times 0,3 = 0,805.\end{aligned}$$

2. Três bolas enumeradas 1, 2 e 3 estão num balde. Sorteamos duas bolas com reposição, e somamos os valores obtidos. Seja X este valor.

   (a) Obter a função de probabilidade, a esperança e a variância de X.

   (b) Refazer o ítem a) se as bolas forem sorteadas sem reposição.

   (c) Em ambos os casos, desenhar a função de distribuição acumulada de X.

   Solução:

   (a) X toma valores no conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $P(2) = 1/9$, $P(3) = 2/9$, $P(4) = 3/9$, $P(5) = 2/9$, $P(6) = 1/9$. Segue que $EX = (2 + 6 + 12 + 10 + 6)/9 = 4$, e $Var(X) = (4 + 18 + 48 + 50 + 36)/9 - 16 = 156/9 - 16 = 4/3$.

   (b) X toma valores no conjunto $\{3, 4, 5\}$ e $P(3) = P(4) = P(5) = 1/3$ e $EX = 4$ e $Var(X) = (9 + 16 + 25)/3 - 16 = 2/3$.

   (c) Figura em escada...

3. Por saber que há uma grande procura por imóveis em determinada região muito valorizada, uma construtora decide comprar um terreno e construir uma casa nesse local.

(a) Uma parte dos recursos necessários para isso será obtida através de um financiamento. Especificamente, admita que o percentual do gasto total a ser financiado se comporta como uma variável aleatória com distribuição Uniforme entre 40% e 70%. Qual é o coeficiente de variação dessa variável?

(b) O prazo necessário para realizar a obra pode ser encarado como uma variável aleatória com distribuição Exponencial. Com base na sua experiência, a construtora presume que uma obra como essa levaria em média 18 meses para ficar pronta. Que prazo para a entrega das chaves, a partir do início da obra, deve ser informado aos possíveis interessados na compra da casa? Admita que a construtora deseja ser capaz de cumprir esse prazo com 80% de probabilidade.

(c) O valor de venda desse imóvel depois de pronto pode também ser considerado como uma variável aleatória, com distribuição Normal, cuja média é 1 milhão de reais. Qual deve ser o desvio padrão dessa distribuição para que se possa garantir, com 90% de probabilidade, que a construtora conseguirá vender a casa por pelo menos 800 mil reais?

Solução:

(a) Percentual financiado $= X \sim U(40;70)$. Então $CV(X) = \frac{\frac{70-40}{\sqrt{12}}}{\frac{40+70}{2}} = 0,157$.

(b) Prazo $= T \sim Exp(1/18)$. Então $F_T(t) = 1 - e^{-\frac{1}{18}t}$ Seja t_0 o prazo a ser anunciado. Para $F_T(t_0) = 0,80$, temos portanto $0.8 = 1 - e^{-\frac{1}{18}t_0}$, e segue que $t_0 = 18 \ln 5 \approx 29$ meses.

(c) Valor (em milhares de reais) $= Y \sim N(1000;\sigma^2)$. Então,

$$0,9 = P(Y > 800) = 1 - P\left(\frac{Y-1000}{\sigma} \leq \frac{-200}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{200}{\sigma}\right).$$

Daí, $\frac{200}{\sigma} = z_{0,9} \approx 1,28$ (quantil $0,9$) e portanto $\sigma \approx \frac{200\,000}{1,28} \approx 156\,000$ reais.

4. Considere a distribuição conjunta das variáveis X e Y, parcialmente dada pela seguinte tabela:

$X \downarrow$ $Y \rightarrow$	-1	0	1	Marginal de $X \downarrow$
-1	?	1/8	1/8	?
0	?	0	1/8	2/8
1	1/8	?	1/8	?
Marginal de $Y \rightarrow$	?	?	?	

(a) Sabendo que $P(Y = -1|X = -1) = 1/3$, complete a tabela.

(b) Calcule $E(XY)$, $E(X)$, $E(Y)$ e $Cov(X,Y)$.

(c) As variáveis X e Y são independentes?

(d) Quando um exemplo pode ser usado para se mostrar que uma afirmação do tipo (SE... ENTÃO...) é falsa então dizemos que ele é um contra-exemplo para essa afirmação. Os itens anteriores constituem um contra-exemplo para que afirmação falsa?

Solução:
(a) Alguns valores são fáceis de obter "diretamente".
Na seguinte tabela, colocamos estes novos valores, e nomeamos os outros valores desconhecidos:

$X \downarrow$ $Y \rightarrow$	-1	0	1	Marginal de $X \downarrow$
-1	a	1/8	1/8	b
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	d	1/8	c
Marginal de $Y \rightarrow$	f	e	3/8	1

Como $1/3 = P(Y = -1|X = -1) = a/b$. Logo, $b = 3a$. (I)
Por outro lado, $b = a + 2/8$. (II)
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos $a = 1/8$ e $b = 3/8$.
Daí, $c = 1 - (3/8 + 2/8) = 3/8$, $d = 3/8 - (1/8 + 1/8) = 1/8$, $e = 1/8 + 0 + 1/8 = 2/8$, $f = 1 - 3/8 - 2/8 = 3/8$.
A tabela é então a seguinte:

$X \downarrow$ $Y \rightarrow$	-1	0	1	Marginal de $X \downarrow$
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
Marginal de $Y \rightarrow$	3/8	2/8	3/8	1

(b) $E(X) = E(Y) = -1 \times 3/8 + 0 \times 2/8 + 1 \times 3/8 = 0$. Por outro lado

$$E(XY) = (-1) \times (-1) \times 1/8 + 0 \times (-1) \times 1/8 + 1 \times (-1) \times 1/8 +$$

$$+ (-1) \times 0 \times 1/8 + 0 \times 0 \times 0 + 1 \times 0 \times 1/8 +$$

$$+ (-1) \times 1 \times 1/8 + 0 \times 1 \times 1/8 + 1 \times 1 \times 1/8 = 0$$

Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) E(Y) = 0, ou seja, X e Y são não correlacionadas.

(c) X e Y não são independentes, porque, por exemplo,

$$P(X = 1, Y = 1) = 1/8 \neq 9/64 = 3/8 \times 3/8 = P(X = 1)P(Y = 1).$$

(d) Embora saibamos que “Se X e Y são independentes então X e Y são não correlacionadas”, a recíproca não é verdadeira.

Boa prova!