UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos
Probabilidade e Estatística - Estatística

Primeira Prova 08-10-2013

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa: as expressoões que levaram a alguma resposta numérica devem ser indicadas nos espaços apropriados.

1. A chance do barco "Da Noi" vencer uma regata se o vento estiver forte (acima de 20 nós) é de 80% e de 40% se o vento estiver fraco. No dia da regata a meteorologia prevê vento forte com 70% de chance. Qual a probabilidade de:
   (a) "Da Noi" vencer a regata?
   (b) O vento ter sido forte sabendo que "Da Noi" venceu a regata?
   (c) O vento ter sido fraco sabendo que "Da Noi" **não** venceu a regata?

2. Sabe-se que um famoso atleta olímpico de tiro com arco costuma acertar o alvo na mosca em cerca de oito em cada dez vezes sob algumas condições específicas. Em um grande torneio internacional, em que estas mesmas condições acontencem, o atleta precisa acertar pelo menos duas vezes na mosca, em três tentativas, para ir às finais.
   (a) Sabendo que a acurácia dos tiros não se altera, proponha um modelo para a variável aleatória que representa o número de acertos na mosca e calcule a probabilidade do atleta ir às finais.
   (b) Determine os valores da função de distribuição acumulada da variável aleatória definida no item anterior para valores do argumento pertencente aos intervalos $(-\infty, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$ e $[3, \infty)$. Forneça uma representação gráfica desta função.

3. Suponha que a altura dos homens em uma certa cidade tem distribuição Normal com média $\mu = 1,80m$ e desvio padrão, $\sigma = 10cm$. Calcule:
   (a) A probabilidade de um homem ter mais de $1,90m$ de altura.
   (b) O valor em metros abaixo do qual estão as alturas de 30% desses homens.
   (c) A mediana e a distância interquartil da variável altura.

4. Um jovem casal deseja ter dois filhos. Analisando as condições do casal, o médico afirma que a probabilidade deles terem dois meninos é de 40% e que a chance do primeiro bebê a nascer ser menina é 50%. O médico também informou que se o primeiro filho for menina, a probabilidade condicional do segundo ser menina é de 40%. Denotem as variáveis aleatórias por $X_i = 0$, se o bebê for menino e $X_i = 1$, se o bebê for menina no i-ésimo nascimento (i=1,2). Encontre:
   (a) A distribuição de probabilidade conjunta de X_1 e X_2 com suas distribuições de probabilidades marginais.
   (b) A probabilidade do segundo filho do casal também ser um menino, dado que o primeiro foi um menino.
   (c) A covariância entre X_1 e X_2.

Boa prova!

Soluções

1. Sejam os eventos:
   V= O barco Vencer a regata;
   F=O vento estar forte.
   São dadas as probabilidades: $P(V|F) = 0,8; P(V|F^c) = 0,4;$
   Então, $P(V^c|F) = 0,2; P(V^c|F^c) = 0,6$

   (a) $P(V) = P(V|F) \times P(F) + P(V|F^c) \times P(F^c) = 0,8 \times 0,7 + 0,4 \times 0,3 = 0,68$;

   (b) $P(F|V) = \frac{P(F \cap V)}{P(V)} = \frac{0,8 \times 0,7}{0,68} = 0,8236;$

   (c) $P(V^c) = 0,32; \quad P(F^c|V^c) = \frac{P(F^c \cap V^c)}{P(V^c)} = \frac{(0,6 \times 0,3)}{0,32} = 0,5625.$

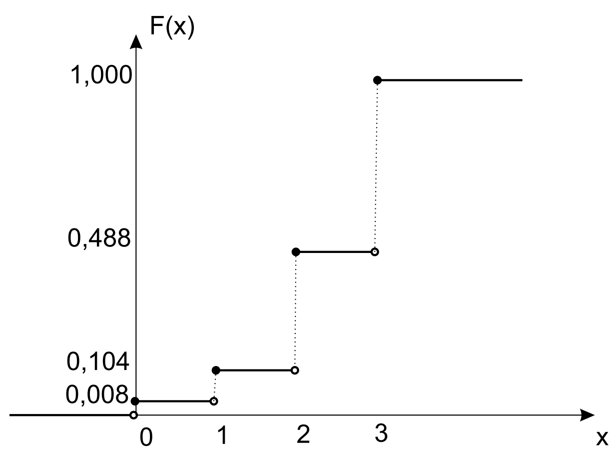
2. $X \sim Bin(3; 0,8)$. Equivalentemente, $p(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix} 0,8^x 0,2^{3-x},\ x = 0,1,2,3.?$

   (a) Probabilidade de ir à final

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= p(2) + p(3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} 0,8^2 \times 0,2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} 0,8^3 \\ &= 0,384 + 0,512 = 0,896. \end{aligned}$$

   (b) $p(0) = 0,008,\ p(1) = 0,096,\ p(2) = 0,384,\ p(3) = 0,512.$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p(0), & 0 \leq x < 1 \\ p(0) + p(1), & 1 \leq x < 2 \\ p(0) + p(1) + p(2), & 2 \leq x < 3 \\ p(0) + p(1) + p(2) + p(3), & x \geq 3 \end{cases}, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,008, & 0 \leq x < 1 \\ 0,104, & 1 \leq x < 2 \\ 0,488, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



3. Seja X a v.a. que mede a altura de uma homem em cm.

   (a) Queremos saber a probabilidade de um homem ter mais de 190cm.

$$P(X > 190) = P(Z > \frac{190-180}{10}) = P(Z > 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

   (b) Seja k o valor em metros abaixo do qual estão as alturas de 30% desses homens.

$$\begin{aligned} P(X < k) &= 0,30 \\ P(Z < \frac{k-180}{10}) &= 0,30 \Rightarrow \Phi(z) = 0,30 \Rightarrow \Phi(-z) = 0,70 \Rightarrow z = -0,52 \\ \frac{k-180}{10} &= -0,52 \\ k &= -5,2 + 180 = 174,8cm \end{aligned}$$

   Resp: Aproximadamente $1,748m$

   (c) Como a distribução Normal é simétrica a mediana será a média, E(X)=μ=1,80.
   Assim, mediana(X)=1,80m.
   Para calcularmos os outros quartis temos que $\Phi(\zeta_{0,25}) = \Phi(-\zeta_{0,75}) = 0,75 \Rightarrow \zeta_{0,75} = 0,67$.
   Assim,

$$\begin{aligned} \frac{Q_1 - 180}{10} &= -0,67 \Rightarrow Q_1 = 180 - 6,7 = 173,3 \\ \frac{Q_3 - 180}{10} &= +0,67 \Rightarrow Q_3 = 180 + 6,7 = 186,7 \\ DIQ &= Q_3 - Q_1 = 2 \times 6,7 = 13,4cm = 0,134m \end{aligned}$$

4. $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 0,4$; $P(X_1 = 1) = 0,5$ e $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = 0,4$.
   $P(X_1 = 0) = 1 - P(X_1 = 1) = 0,5$. Portanto, $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{P(X_1=1,X_2=1)}{P(X_1=1)} = 0,4$
   $\Rightarrow P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0,2$. Então, $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0,5 - 0,2 = 0,3$ e
   $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 1 - 0,9 = 0,1$.

   (a) Distribuição de probabilidade conjunta:

$x_1 \vert x_2$	0	1	p(x$_1$)
0	0,4	0,1	0,5
1	0,3	0,2	0,5
p(x$_2$)	0,7	0,3	1,0

   (b) $P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \frac{P(X_1=0,X_2=0)}{P(X_1=0)} = 0,8$

   (c) A $Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1) \times E(X_2)$.
   $E(X_1X_2) = 0(0,4 + 0,1 + 0,3) + 1 \times 0,2 = 0,2$ e $E(X_1) = 0,5; E(X_2) = 0,3$
   Assim, $Cov(X_1, X_2) = 0,2 - 0,5 \times 0,3 = 0,05$.