CAPÍTULO 3

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Conceitos e resultados a serem apresentados neste capítulo:

Função de densidade de uma variável aleatória contínua
Função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua
Média Populacional ou Esperança de uma variável aleatória contínua
Variância, desvio padrão e coeficiente de variação de uma v.a. contínua
Quantil de uma distribuição de probabilidade contínua
Quartis e Distância Interquartil de uma variável aleatória contínua
Famílias de Distribuições contínuas: Uniforme, Exponencial, Gama, Normal
Confiabilidade
A curva Normal – Padronização – Normal Padrão
Uso da Tabela da Normal

3.1- O Coceito de Variáveis Aleatórias Contínua

Ao contrário do que ocorre com as variáveis discretas, cujos valores podem ser obtidos por um processo de enumeração ou contagem, os valores de uma variável contínua são em geral oriundos de uma medição.

São exemplos de variáveis aleatórias contínuas:

- O tempo que um operário gasta para executar uma determinada tarefa
- A duração de uma lâmpada
- O diâmetro de um rolamento
- A intensidade de uma corrente elétrica

Observe que em todos esses casos, embora possa ser determinada uma unidade de medida (minutos, horas, milímetros, ampères), é possível imaginar a variável assumindo qualquer valor igual a uma fração da unidade adotada.

Mesmo sendo expressas em uma determinada unidade (o que poderia ser interpretado como uma discretização) é muito mais adequado, do ponto de vista matemático, tratar cada variável mencionada acima como uma variável que pode assumir todos os valores reais em algum dado intervalo, isto é, cada uma delas varia continuamente.

Uma variável aleatória X é dita contínua se ela assume todos os possíveis valores dentro de um intervalo (ou conjunto de intervalos) de números reais.

Devido à natureza contínua de X não podemos mais atribuir uma probabilidade diferente a cada valor possível da variável. Entretanto, podemos definir uma probabilidade para um dado intervalo, ou seja, $P(a \leq X \leq b)$ para dois números reais a e b $(a < b)$.

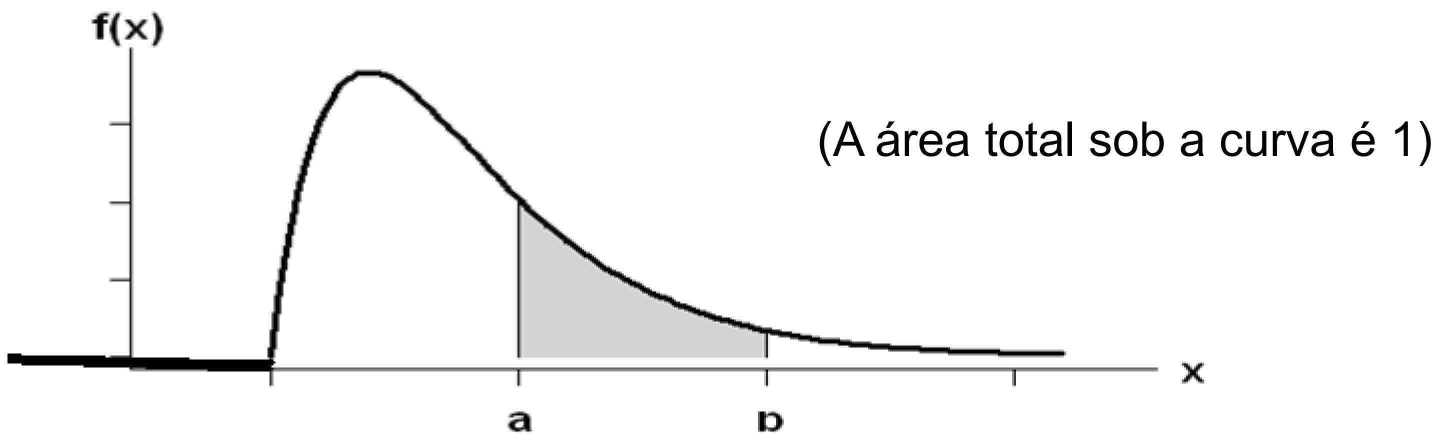
Isto é conseguido substituindo a função de probabilidade p por uma função f , chamada função de densidade de X , ou simplesmente , densidade de X.

2.3.1 Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua

Note a semelhança com a definição de função de probabilidade de uma v.a. discreta, onde a **soma é agora substituída por uma integral**.

Dizemos que X é uma variável aleatória contínua se existe uma função f , chamada **função de densidade de X** satisfazendo as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para todo x real
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
3. Para quaisquer a, b reais (a<b), $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$



Vemos que $P(a \leq X \leq b)$ é dada pela área sob a curva compreendida entre as retas $x=a$ e $x=b$

A probabilidade de qualquer valor particular de X é nula. Com efeito, o evento **{X=a}** pode ser expresso como {a≤X≤a}, e P(X=a)= $\int_a^a f(x)\,dx$ = 0.

Isto também pode ser explicado dizendo que a área de um segmento de reta é 0.

Este fato não é tão simples de se compreender na prática. **Por exemplo**, em uma turma de estudantes podemos facilmente encontrar mais de um aluno com estatura igual a 1,70 m (170 cm), o que parece sugerir que a probabilidade da v.a. X (estatura) ser exatamente igual a 170 cm não é nula. Entretanto temos de lembrar que a estatura está sendo expressa em centímetros. Se fosse usado um **instrumento de medição com a precisão em mm**, talvez essas estaturas não fossem mais as mesmas. Podemos ter um aluno com **169,8 cm** e um outro com **170,1 cm**, por exemplo.

O que ocorre é que, quando afirmamos que a estatura de um aluno é de 170 cm, o que queremos dizer é que ela está no intervalo **169,5 ≤ X ≤ 170,5**, cuja probabilidade pode ser maior do que zero.

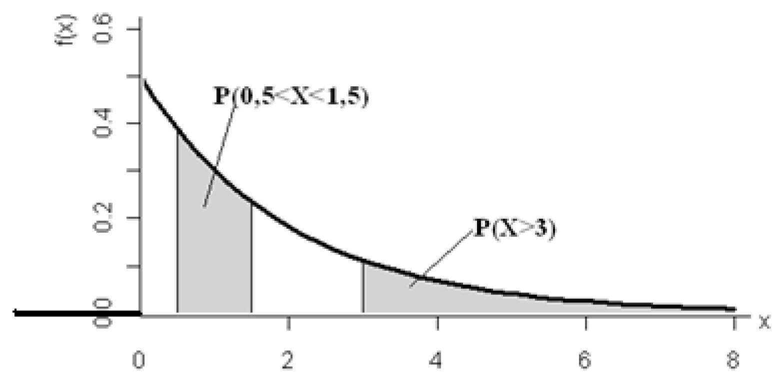
Se X é uma v.a. contínua e se a e b são números reais tais que a < b,

P(a≤ X ≤b) = P(a< X ≤ b) = P(a≤ X <b) = P(a< X <b)

Exemplo 3.1: Tempo de vida de um equipamento eletrônico

O tempo de vida (em anos) de um equipamento eletrônico de determinado tipo pode ser expresso por uma v.a. contínua X, cuja função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-x/2\right), & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$



Determine a probabilidade de que o equipamento dure:

a) mais de 3 anos;

b) entre 6 e 18 meses.

Solução:

Primeiramente, vamos verificar que a função dada é uma legítima função de densidade. Notemos que $f(x) \geq 0$ para todo x real e que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x/2}dx = 1$$

a) $P(X > 3) = \int_3^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x/2}dx = e^{-3/2} = 0{,}2231$

Isto quer dizer que aproximadamente 22,3% dos equipamentos deste tipo duram mais de três anos.

b) Como a unidade de medida é um ano, a probabilidade pedida é

$$P(0{,}5 \leq X \leq 1{,}5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{1}{2}e^{-x/2}dx = e^{-0,5/2} - e^{-1,5/2} = 0{,}3064$$

Aproximadamente em 30,6% dos casos, o tempo de vida do equipamento varia entre 6 e 18 meses.

3.2 - Distribuição Acumulada (FDA) de uma v.a. contínua X

A definição é a mesma que foi usada para uma v.a discreta.

$F(x) = P(X \leq x)$, para todo número real x .

O que muda é a forma de cálculo e o aspecto do gráfico da FDA.

Se X é uma v. a. contínua, com função de densidade f, sua Função de Distribuição Acumulada (FDA) é:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad , \text{ para todo x real .}$$

A FDA de uma variável aleatória contínua possui muitas das propriedades da FDA de uma variável aleatória discreta. A diferença é que **no caso contínuo o gráfico de F não é uma "função escada", mas uma função contínua**.

Propriedades da Função de Distribuição Acumulada F para uma variável aleatória contínua

a) F é uma função contínua.

b) F é uma função não decrescente, ou seja, $x < y$ implica $F(x) \leq F(y)$;

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

d) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;

e) Se $a < b$, $P[a<X<b] = F(b) - F(a)$

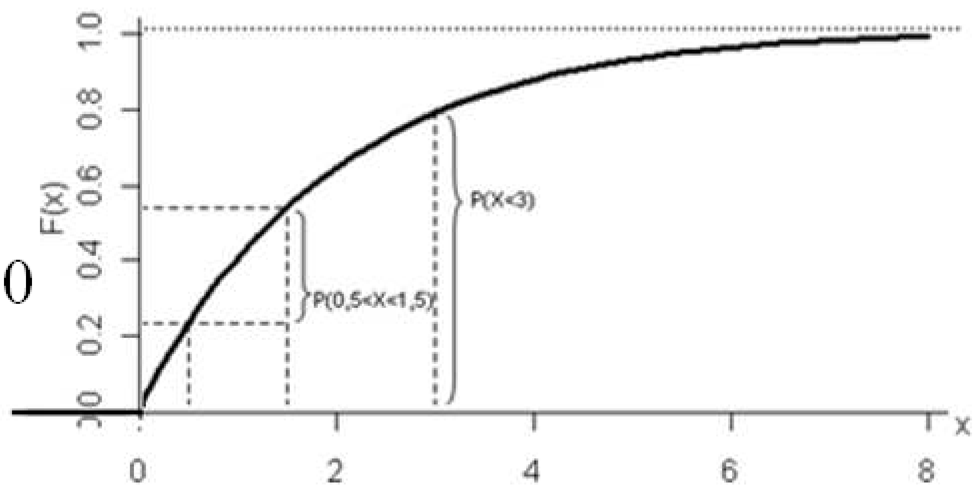
Exemplo 3.2: De novo, o tempo de vida de um equipamento eletrônico

Ao calcularmos a FDA da v.a X do Exemplo 3.1 observamos que :

a) Se $x<0$, $f(x) = 0$ e $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

b) Se $x \ge 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-t/2}\,dt = 1 - e^{-x/2}$, se $x \ge 0$

Em resumo $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2}, \text{ se } x \ge 0 \end{cases}$



Note que as probabilidades ali obtidas podem ser recalculadas usando a FDA.

$P(X>3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-3/2}) = e^{-1,5} = 0{,}2231$

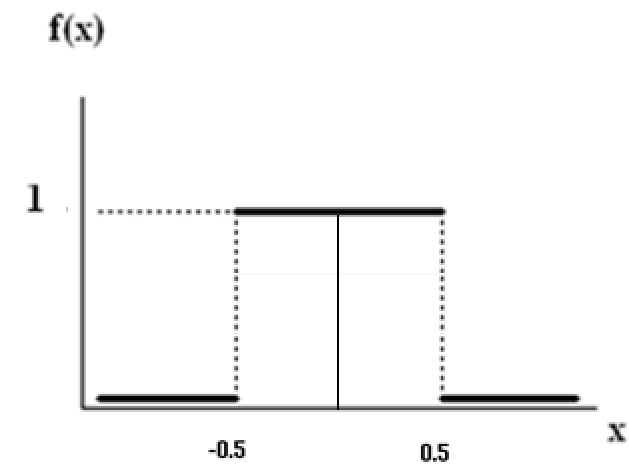
$P(0{,}5 \le X \le 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0{,}5) = (1 - e^{-1,5/2}) - (1 - e^{-0,5/2}) = e^{-0,25} - e^{-0,75} = 0{,}3064$

Em algumas situações, as probabilidades podem ser obtidas sem necessidade de integração.

Exemplo 3.3: Erros de arredondamento

Quando números reais são arredondados para os inteiros que lhes são mais próximos, os erros de arredondamento assumem valores entre -0,5 e +0,5. Além disso, dado um sub-intervalo qualquer I = (a,b) contido no intervalo [-0,5; +0,5], a probabilidade de que o erro de arredondamento X pertença a I deve ser proporcional à sua amplitude (b – a). Podemos então considerar que esse erro X se comporta como uma variável aleatória contínua cuja função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -0,5 \leq x \leq 0,5 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

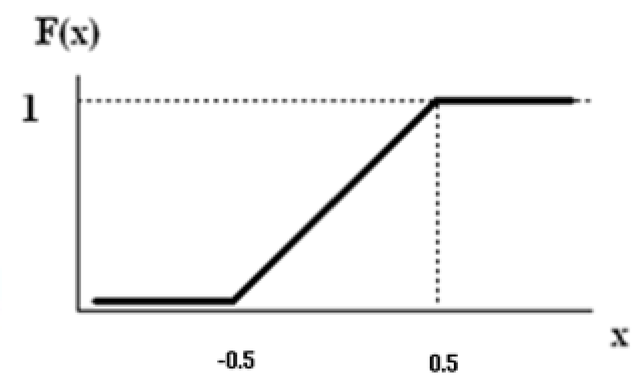


Vejamos qual é a função de distribuição acumulada.

Se $x \leq -0,5$, $f(x) = 0$ e $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0.dt = 0$

Se $-0.5 < x < 0,5$, $f(x)=1$ e $F(x)=\int_{-\infty}^{-0,5} 0.dt + \int_{-0,5}^{x} dt = x + 0,5$

Se $x \geq 0,5$, $f(x) = 0$ e $F(x)=\int_{-\infty}^{-0,5} 0.dt + \int_{-0,5}^{0,5} dt + \int_{0,5}^{\infty} 0.dt = 1$

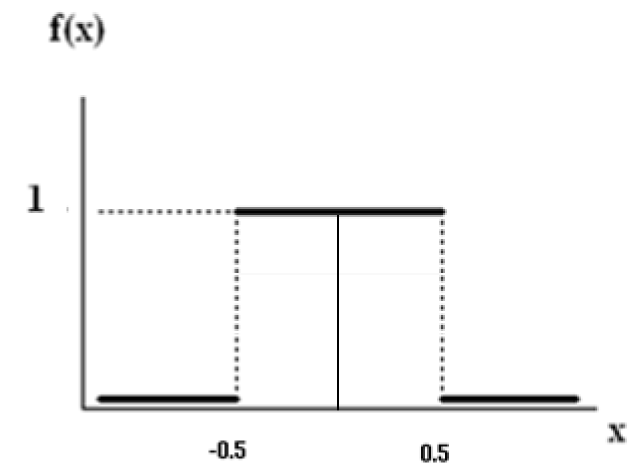


Em algumas situações, as probabilidades podem ser obtidas sem necessidade de integração.

Exemplo 3.3: Erros de arredondamento

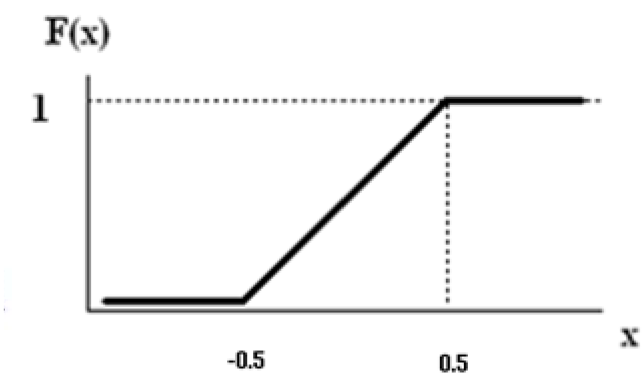
Quando números reais são arredondados para os inteiros que lhes são mais próximos, os erros de arredondamento assumem valores entre -0,5 e +0,5. Além disso, dado um sub-intervalo qualquer I = (a,b) contido no intervalo [-0,5; +0,5], a probabilidade de que o erro de arredondamento X pertença a I deve ser proporcional à sua amplitude (b – a). Podemos então considerar que esse erro X se comporta como uma variável aleatória contínua cuja função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -0,5 \leq x \leq 0,5 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$



Vejamos qual é a função de distribuição acumulada.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -0,5 \\ 0,5 + x, & \text{se} -0,5 < x \leq 0,5 \\ 1, & \text{se } x > 0,5 \end{cases}$$



A relação entre as funções f e F relativas a uma v.a. contínua

Como vimos, o valor F(x) é obtido integrando a função f entre $-\infty$ e x . Da mesma forma, podemos obter f(x) derivando F(x) com relação a x.

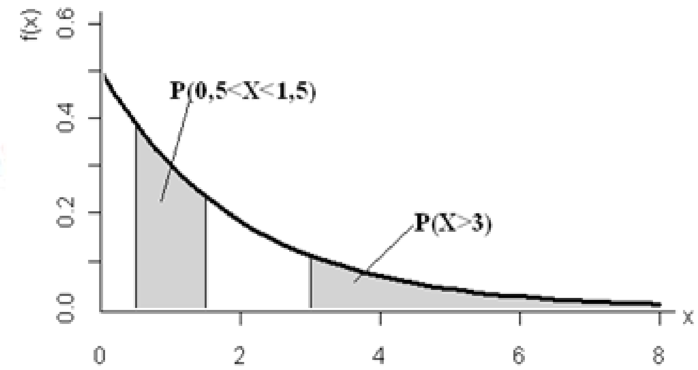
Seja F a FDA de uma v.a. contínua com densidade f. Então, $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ para todo x no qual F seja derivável.

Exemplo 3.4: Segue o tempo de vida de um equipamento eletrônico

Consideremos a função F obtida no Exemplo 3.1.

Se $x<0$, $F(x) = 0$ e portanto , $f(x) = \frac{d}{dx}0 = 0$

Se $x>0$, $F(x) = 1 - e^{-x/2}$ e $f(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-x/2}) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$



Notemos que F **não é derivável** no ponto x=0. Neste ponto o valor de f poderia ser fixado arbitrariamente sem alterar as probabilidades, já que a probabilidade de qualquer ponto particular é zero. Assim obtemos a função de densidade do exemplo 3.1, onde consideramos, por conveniência, f(0) = 1/2.

3.3 Medidas de Centralidade e de Dispersão de uma V. A. Contínua

As **medidas de centralidade** que serão aqui apresentadas são a **esperança** (ou média, ou valor esperado) e a **mediana** de uma variável aleatória contínua X. Como **medidas de dispersão** (ou de variabilidade), consideraremos **a variância, o desvio-padrão e a distância interquartil**.

As definições são semelhantes às do caso discreto, sendo que as **somas são substituídas por integrais**.

Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade f.

A esperança de X é definida e calculada como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx,$$

desde que a integral seja absolutamente convergente , ou seja, desde que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx < \infty.$$

Se essa última integral é finita, a variância de X é definida e calculada como

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx.$$

Diremos que Var(X) é finita se essa integral é convergente.

A variância também pode ser calculada pela expressão

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2.$$

Exemplo 3.5: Tempo de vida de um equipamento eletrônico (cont.)

Para a v.a X do Exemplo 3.1 temos :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} x.0dx + \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{2}e^{-x/2}dx = 2 \quad \text{(após integração por partes)}$$

Ou seja, o equipamento dura em média 2 anos.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x.0dx + \int_{-\infty}^{0} x^2.0dx + \int_{-\infty}^{0} x^2.\frac{1}{2}\ e^{-x/2}dx = 8 \quad \text{(após integração por partes)}$$

Logo, $Var(X) = 8 - 2^2 = 4$ anos^2. Daí , $DP(X) = 2$ anos e $CV(X) = 1$.

Exemplo 3.6: Erro de arredondamento (cont.)

Para a variável aleatória X do Exemplo 3.3,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ \ f(x)\ dx = \int_{-0,5}^{0,5} x\ dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-0,5}^{0,5} = 0$$

(Observação: A integral foi calculada entre -0,5 e +0,5 porque, para os outros valores de x, a função de densidade é nula.)

$$\text{Já que} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ \ f(x)\ dx = \int_{-0,5}^{0,5} x^2\ dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-0,5}^{0,5} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{1}{12},$$

$$Var(X) = \frac{1}{12} - 0^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow DP(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} = 0,289\ .$$

Aqui o coeficiente de variação não existe porque E(X) = 0.

Interpretação física da média e da variância de uma v. a. contínua

Por analogia com o caso discreto, a **média** ou esperança de X pode ser interpretada como sendo a abscissa do **centro de gravidade** da distribuição de probabilidade representada pela função f, vista aqui como se fosse uma distribuição contínua de massa. E novamente por analogia com o caso discreto, poderíamos pensar **na variância como sendo o momento de inércia** da distribuição contínua de massa representada pela função de densidade f com respeito a um eixo vertical que passa pelo seu centro de gravidade.

Visualização geométrica dos conceitos de média e variância

Uma vez que o comportamento de uma variável aleatória contínua X é basicamente caracterizado por sua função densidade f, como o **aspecto visual do gráfico da f** pode nos ajudar a interpretar os conceitos de média e variância de X?

Geometricamente, diremos que:

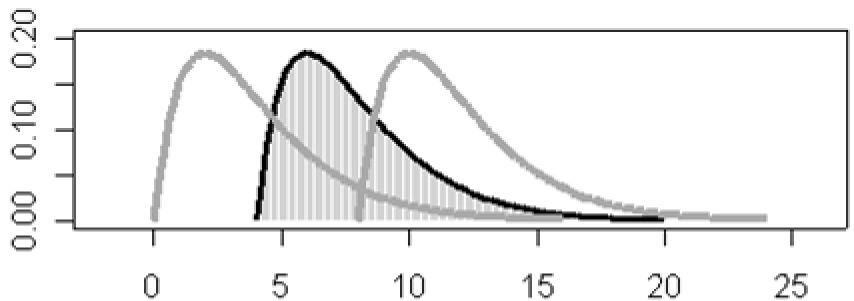
- Quanto mais à direita estiver o centro de gravidade da f no gráfico, maior será a média da variável considerada;
- Quanto **mais espalhado** **(disperso, aberto) for o gráfico da f** **com relação à sua média**, **maior será a variância** da variável considerada.

Exemplo 3.7: O visual da densidade, da média e da variância

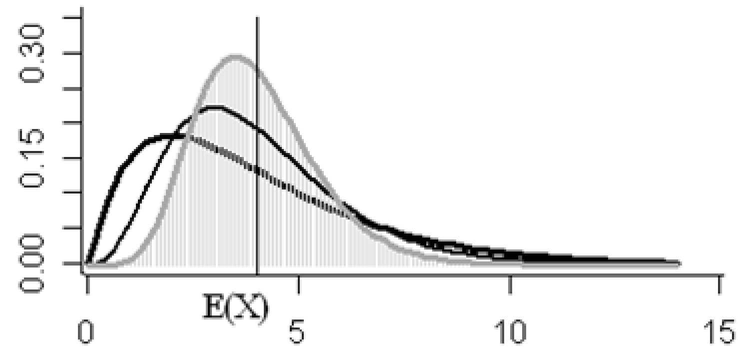
As Figuras a seguir nos mostram, respectivamente, como ficaria o gráfico de:

(a) Três funções densidade com a mesma variância e médias diferentes

(b) Três funções densidade com a mesma média e variâncias diferentes



(a)



(b)

No Caso(a):

É fácil ver que essas três curvas são exatamente iguais à menos de uma translação. Por isso, todas elas têm a **mesma variância**, embora suas **médias sejam diferentes**.

No Caso(b):

Essas três curvas têm todas elas **o mesmo centro de gravidade, E(X)=4**. Porém em termos de suas **dispersões em torno da média elas não são iguais**. Por isso, todas elas têm a mesma média, embora suas variâncias sejam diferentes.

Algumas observações importantes sobre Quantis:

1. A **mediana** de X é uma **medida de centralidade** . Ela é o ponto que divide em duas partes iguais (equiprováveis) uma distribuição de probabilidades.

2. A **distancia interquartil** , é uma **medida de dispersão**.

3. Quando se divide a distribuição de probabilidade em partes percentuais, os divisores correspondentes são chamados de **percentís**. Assim , o 10º percentil é $\zeta_{0,1}$, o 25º percentil é $q_1 = \zeta_{0,25}$, e assim por diante.

4. Um caso particular, que abrange muitas das situações de maior interesse prático, é aquele em que X é uma v.a. contínua cuja FDA, F, é uma função estritamente crescente. Neste caso ζ_q, o seu **quantil** q, é tal que $F(\zeta_q) = q$. Conseqüentemente, para uma tal variável aleatória X, temos:

   $F(q_1(X)) = 0{,}25$, $\quad F(q_2(X)) = 0{,}50$ $\quad$ e $\quad F(q_3(X)) = 0{,}75$

5. Os **quantis** são de uso importante num ramo da Estatística chamado **Estatística não paramétrica**.

Exemplo 3.8: Tempo de vida de um equipamento eletrônico - Determinação dos quartis

Já que, para a v.a X do Exemplo 3.1, F é estritamente crescente,

temos:

$$F(q_2(X)) = 1 - \exp\left(-\frac{q_2(X)}{2}\right) = 0,5$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{q_2(X)}{2} = \ln(0,5) = -0,693 \quad \Rightarrow \quad q_2(X) = 1,39$$

Analogamente encontramos: $q_1(X) = 0,58$, $q_3(X) = 2,77$, $DIQ(X) = 2,19$

Isto quer dizer que:

- **metade dos equipamentos desse tipo duram no máximo 1,39 anos** (ou seja, 1 ano e 5 meses aproximadamente).
- **50% desses equipamentos têm seu tempo de vida entre 0,58 anos e 2,77 anos** (ou seja, entre 7 meses e 2 anos e 9 meses aproximadamente).

3.4 Alguns dos modelos contínuos mais importantes

O modelo Uniforme Contínuo

Dados os números reais a e b ($a < b$), diz-se que variável aleatória X tem distribuição uniforme no intervalo [a,b], se sua função de densidade (f) é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Prova-se também que $E(X) = (a + b)/2$ e $Var(X) = (b - a)^2/12$.

A função de distribuição acumulada é: $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Para indicar que X segue o modelo uniforme contínuo no intervalo [a,b] escrevemos $X \sim U(a, b)$.

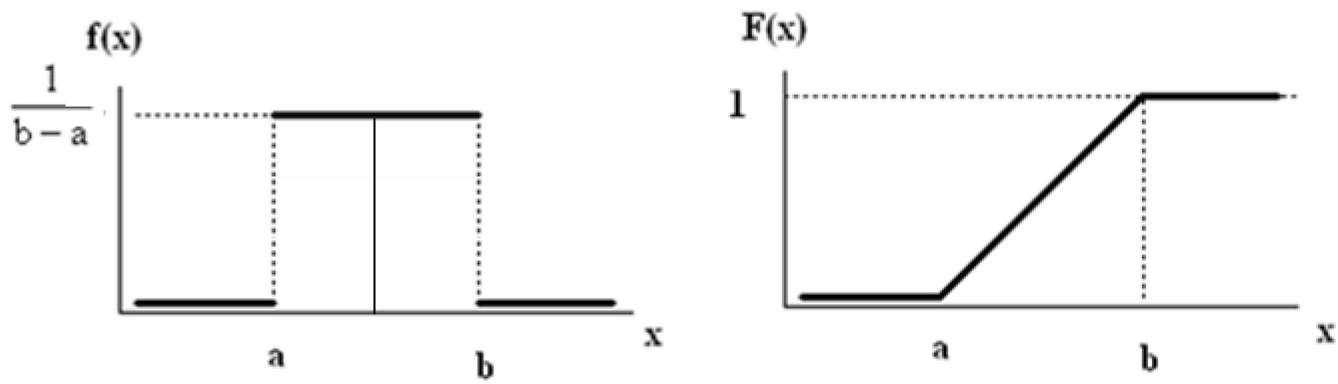


Figura 3.8 A densidade e a FDA da Uniforme[a,b]

Observação:

Notemos que se X ~ U[a ,b], então para qualquer subintervalo [c,d], onde $a \leq c < d \leq b$, $P(c \leq X \leq d)$ é a mesma para todos os subintervalos que tenham o mesmo comprimento. De fato, $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$, que depende somente do comprimento (d – c) do subintervalo e não de seus limites.

Exemplo 3.9: Novamente o erro de arredondamento

É fácil ver que a variável X = erro de arredondamento considerada nos exemplos 3.3 e 3.6 segue uma lei de probabilidade Uniforme no intervalo $[-0{,}5;0{,}5]$.

Conseqüentemente, vemos que, por exemplo:

$$P(-0{,}2 \leq X \leq 0) = P(0{,}1 \leq X \leq 0{,}3) = 0{,}2.$$

Observação:

Escolher ao acaso um ponto P dentro de um intervalo [a,b] é o mesmo que dizer que a coordenada X do ponto em questão é uniformemente distribuída sobre [a,b]. Por este motivo, a distribuição uniforme contínua tem um papel de destaque na conceituação do que seja um gerador de números aleatórios, ferramenta fundamental da metodologia de Simulação por Monte Carlo.

Exemplo 3.10: Esperando o ônibus

Helena é aluna de Engenharia Química e todos os dias se dirige de ônibus à sua faculdade. Há somente um ônibus que lhe serve e ele costuma passar pelo ponto em qualquer instante entre 7:00 e 7:30 . Se num certo dia Helena chega ao ponto às 7:24 qual a probabilidade de conseguir pegar o ônibus?

Solução:

Seja X o instante da chegada do ônibus ao ponto. Note que a uniformidade de X está implícita no enunciado. Então $X \sim U(0, 30)$, onde X é medida em minutos e 0(zero) corresponde às 7:00 h.

Para Helena pegar o ônibus ele deve chegar após as 7:24 (ou seja, entre 7:24 e 7:30)

Temos: $P(X>24) = P(24 < X \leq 30) = \frac{6}{10} = 0{,}2$

O modelo exponencial

Se λ é uma constante positiva, dizemos que a variável aleatória X obedece a um <u>modelo probabilístico exponencial</u> com parâmetro λ, se sua função de densidade é dada pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \lambda \exp(-\lambda x), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Além disso, $E(X) = 1/\lambda$ e $Var(X) = 1/\lambda^2$

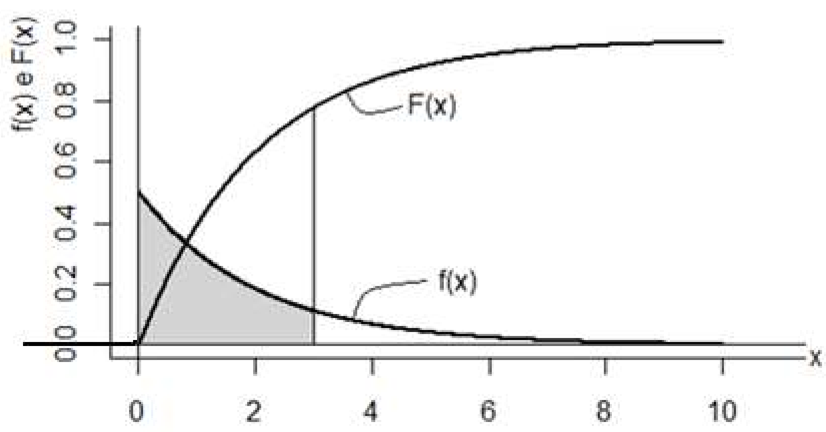
É imediato que f é uma legítima função de densidade, porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$$

Portanto a Função de distribuição acumulada é calculada como se segue:

$$\text{Se } x < 0 \text{ , } F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{0.dt} = 0$$

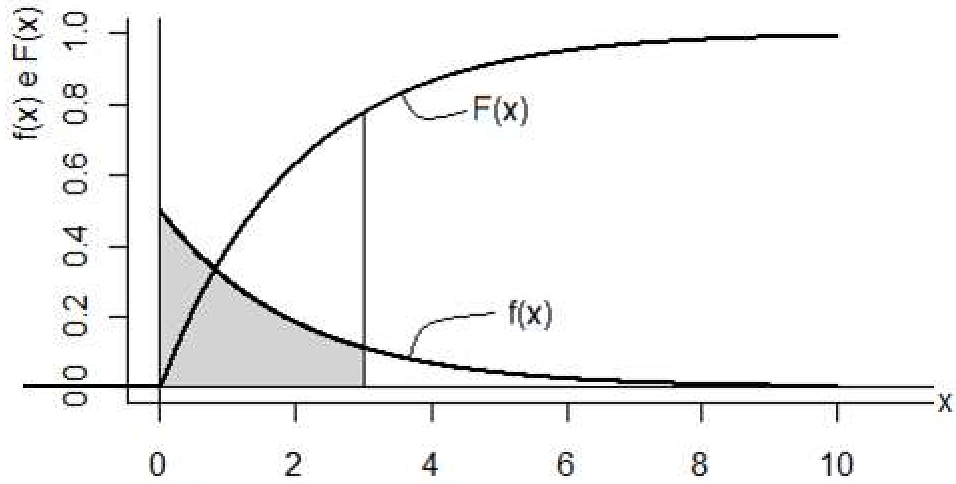
$$\text{Se } x \geq 0 \text{ , } F(x) = \int_{-\infty}^{0} \mathbf{0.dt} + \int_{0}^{x} \boldsymbol{\lambda e^{-\lambda t} dt} = 1 - e^{-\lambda x}$$



Em resumo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

A figura a seguir mostra, **no mesmo gráfico**, como ficam as funções **f (densidade) e F(distribuição acumulada)** no caso em que $\lambda = ½$.



Na figura se observa, por exemplo, que a **ordenada da função de distribuição acumulada F no ponto x=3**, ou seja, **$F(3) = 1 - \exp(-1,5) = 0,777$** é numericamente **igual à área em destaque sob o gráfico da função de densidade f entre x = 0 e x = 3**.

É fácil verificar, usando integração por partes, que **$E(X) = 1/\lambda$ e $Var(X) = 1/\lambda^2$**.

Exemplo 3.11: O tempo de vida de um equipamento eletrônico revisitado

A v.a. X do Exemplo 3.1 (tempo de vida, em anos, de um equipamento eletrônico) segue um modelo exponencial com parâmetro **$\lambda = 1/2$**. Como vimos, **$E(X) = 2$ anos e $Var(X) = 4$ anos^2**.

Relação entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson

Existe uma interessante relação entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson:

Sejam **X a v.a. que representa o número de ocorrências** de um evento de determinado tipo ao longo de um intervalo de amplitude t e **T a v.a. que representa o intervalo de tempo entre a ocorrência de dois eventos consecutivos** desse tipo.

Então:

X segue um modelo de Poisson com parâmetro λt, se e só se
T segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ.

Ou, simbolicamente:

$P[X=k]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0,1,2,\ldots$, **se e somente se** $P[T \le t] = 1 - e^{-\lambda t}$, para todo $t > 0$.

De fato, suponha que X é Poisson(λt).
Então, X = 0 (ou seja, **não ocorre nenhum evento no intervalo (0,t)**) se e somente se T>t.

Portanto, P(X=0) = P(T>t) . Ou seja, $\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$.

Então, $F(t) = P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Como esta é a FDA de uma exponencial, concluímos que $T \sim \exp(\lambda)$.

Ou seja, a distribuição exponencial se aplica às mesmas situações que a de Poisson, isto é, para modelar fenômenos como os seguintes:

- Tempo entre a chegada de dois navios a um porto
- Tempo entre a chegada de dois clientes a uma loja comercial
- Tempo entre as chegadas de dois e-mails consecutivos à caixa de entrada de uma pessoa.

Interpretação do parâmetro λ da distribuição exponencial

Dentro desse contexto, o parâmetro λ da distribuição exponencial tem uma interpretação interessante: Trata-se da **freqüência média de ocorrências** do fenômeno considerado por unidade de tempo. Por outro lado, $\tau = 1/\lambda$ é o **valor médio** desse intervalo de tempo, à luz do modelo exponencial, já que $E(X) = 1/\lambda = \tau$.

Esta relação **Exponencial-Poisson** é mantida mesmo quando a unidade considerada para a ocorrência de eventos não é o tempo. Então, se, por exemplo, D é a v.a. representando a distância entre duas falhas consecutivas no recapeamento de um fio elétrico, e se o número médio de falhas em d metros de fio é λd, então **a v.a X que representa o número de falhas em d metros de fio tem distribuição Poisson(λd) e D ~ exp(λ), como veremos no exemplo a seguir.**

Exemplo 3.12: Novamente as falhas no recapeamento do fio elétrico

Voltemos ao Exemplo 2.17. Nele a v.a X, que representa o número de falhas por metro de fio, tem distribuição Poisson(λ), com $\lambda=2$. Assim, se **Y é a v.a. representando o número de falhas em d metros de fio, teremos Y ~ Poisson(λd) = Poisson(2d). A v.a. D, que representa a distância entre duas falhas consecutivas, terá distribuição exp(2).**

Dessa maneira, a freqüência média de falhas por metro é 2 e a distância média entre duas falhas consecutivas é 0,5 metros.

Propriedade de perda de memória da v.a. Exponencial

Outra interessante propriedade da distribuição exponencial é a chamada "**perda de memória**". Isto é, se o fenômeno segue um **modelo exponencial** então a **probabilidade condicional de não ocorrer nenhum evento no intervalo de tempo (t_1, t_1+t_2), dado que não ocorreu nenhum evento no intervalo ($0,t_1$), é igual à probabilidade (incondicional) de não ocorrer nenhum evento no intervalo (0, t_2)**.

Ou, matematicamente, dados quaisquer reais t_1 e t_2, ambos positivos,

$$P(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = P(X > t_2).$$

Com efeito, no caso da distribuição exponencial:

$$P(X > t_1+t_2 \mid X > t_1) = \frac{P(X>t_1+t_2)}{P(X>t_1)} = \frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-t_2} = P(X > t_2).$$

Esta propriedade da distribuição exponencial é amplamente usada na Teoria da Confiabilidade.

> **A <u>Confiabilidade</u> de um componente (ou sistema) ao longo de um intervalo de amplitude t, que denotamos por R(t), é definida como R(t) = P(T > t), onde T é a v.a. que representa a duração da vida do componente.**

Há várias leis que regem a **Confiabilidade de um componente**. Uma delas, a **Lei de Falhas Exponencial**, é aplicada quando a **taxa de falhas, λ, é constante**. Isto ocorre quando **não há desgaste do material com o tempo**. Assim, por exemplo, se o componente já está funcionando há 1000 horas, a probabilidade de que ele continue funcionando até 1500 horas é igual à probabilidade de ele funcionar apenas 500 horas a contar do instante inicial. Note que aqui está sendo usada a propriedade de "**perda de memória**".

Componentes elétricos ou eletrônicos e tabelas de vida em Atuária

A situação da **Lei de Falhas Exponencial** ocorre comumente com componentes elétricos ou eletrônicos – como lâmpadas, chips, transistores, etc. – que podem falhar subitamente, sem apresentar desgaste ou fadiga do material.

No caso de componentes de outros tipos, que se desgastam com o uso, a **lei exponencial** pode ser usada em intervalos não muito grandes. Por exemplo, um carro pode ter uma taxa elevada de falhas no período de rodagem. Posteriormente, **após alguns ajustes, talvez a taxa de falhas se mantenha aproximadamente constante durante algum tempo, para em seguida voltar a aumentar progressivamente quando aparecerem os primeiros sinais de desgaste**.

Este fenômeno pode ser observado em outras situações, como nas **tabelas de vida em Atuária**, onde **há uma alta taxa de mortalidade nos primeiros anos de vida, seguida por uma certa estabilidade durante a juventude e a idade madura, e novamente um aumento da taxa de mortalidade na idade senil**. **Nos períodos em que essas taxas permanecem constantes, o modelo exponencial de falhas pode ser aplicado**.

Exemplo 3.13: Tempo de vida de uma lâmpada

O tempo de vida T de um certo tipo de lâmpada segue uma distribuição exponencial com média de 10000 horas. Se tiver sido encomendado um lote com 20000 lâmpadas desse tipo:

(a) Quantas dessas lâmpadas que deverão queimar antes de 10000 horas de uso?

(b) Após quantas horas de uso 90% das lâmpadas do lote deverão estar queimadas?

(c) Se uma determinada lâmpada já durou mais de 12000 horas, qual a probabilidade dela durar mais de 20000 horas?

(d) Qual é a **confiabilidade** de uma lâmpada no período de 20000 horas?

Solução:

(a) Sabemos que $E(T) = 1/\lambda = 10000$. Logo, $\lambda = 0{,}0001$. Isto quer dizer que a freqüência média de "mortes" dessas lâmpadas é de 0,0001 lâmpada por hora.

Queremos determinar $P[\,T \leq 10000\,]$. Mas isto é precisamente:

$$F(10000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 10000} = 1 - e^{-1} = 0{,}6321$$

Isso quer dizer que, após 10000 horas de uso, entre as 20000 do lote, cerca de 12642 (0,6321*20000) lâmpadas deverão estar queimadas.

(b) Queremos obter um valor t_o tal que $P[\,T \leq t_o] = 0{,}9$.

$$F(t_0) = 1 - \exp(-0{,}0001 t_0) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \exp(-0{,}0001 t_0) = 0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad -0{,}0001\, t_0 = \ln(0{,}1) = -2{,}3026 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 23026 \text{ horas}$$

Isso quer dizer que, passadas 23026 horas de uso, cerca de 18000 lâmpadas deverão estar queimadas.

Exemplo 3.13: Tempo de vida de uma lâmpada

O tempo de vida T de um certo tipo de lâmpada segue uma distribuição exponencial com média de 10000 horas. Se tiver sido encomendado um lote com 20000 lâmpadas desse tipo:

(a) Quantas dessas lâmpadas que deverão queimar antes de 10000 horas de uso?
(b) Após quantas horas de uso 90% das lâmpadas do lote deverão estar queimadas?
(c) Se uma determinada lâmpada já durou mais de 12000 horas, qual a probabilidade dela durar mais de 20000 horas?
(d) Qual é a **confiabilidade** de uma lâmpada no período de 20000 horas?

Solução:

(c)Pela propriedade de falta de memória da distribuição exponencial,

$$P(T > 20000 \mid T > 12000) = P(T > 8000) = \exp(-0{,}0001\times 8000) = e^{-0,8} = 0{,}449.$$

Repare que o cálculo desta probabilidade condicional não levou em consideração o fato de a lâmpada já ter 12000 horas de uso. Na verdade ela só depende das 8000 horas adicionais.

(d)$R(20000) = P(T > 20000) = \exp(-0{,}0001\times 20000) = e^{-2} = 0{,}135.$

Observação: A solução do exemplo anterior pode ser também obtida diretamente a partir de um software que contenha a exponencial acumulada (direta e inversa).

3.5 A Distribuição Normal

Dada a sua relevância no Cálculo de Probabilidades, dedicaremos uma seção deste capítulo exclusivamente ao modelo Normal. Este modelo foi proposto inicialmente pelo matemático *Carl Friedrich Gauss* e, por esse motivo, é também chamado **modelo Gaussiano**.

3.5.1 - Generalidades

Por várias razões, a distribuição Normal é o modelo mais usado em todo o Cálculo de Probabilidades. A curva Normal ou Gaussiana **descreve de forma muito adequada o comportamento de uma variável que se distribui de forma simétrica em relação a um valor central**. Os 2 parâmetros que a caracterizam são μ, que especifica o seu valor central e σ^2, que define a sua variabilidade.

Dadas as constantes μ e σ^2 (onde $\sigma > 0$), diz-se que a variável aleatória X tem **distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2** se a sua densidade é dada pela expressão matemática

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\} \quad \text{para todo x real.}$$

Prova-se que **$E(X) = \mu$** e **$Var(X) = \sigma^2$**.

Notação : $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ significa "a v.a. X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2".

"O charme encantador desta ciência sublime revela-se apenas para aqueles que têm a coragem de mergulhar nela profundamente."
Carl Friedrich Gauss, matemático

As figuras 3.11 e 3.12, a seguir, nos mostram o aspecto visual, respectivamente, da função densidade e da função de distribuição acumulada de uma Normal.

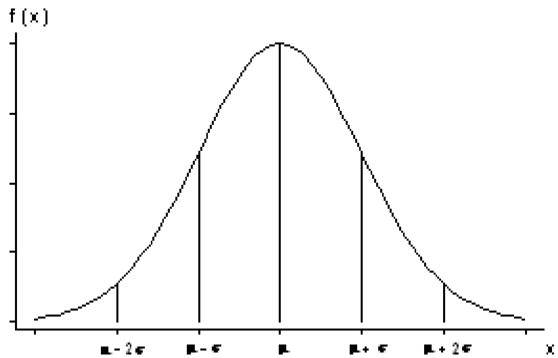


Figura 3.11 A densidade da Normal

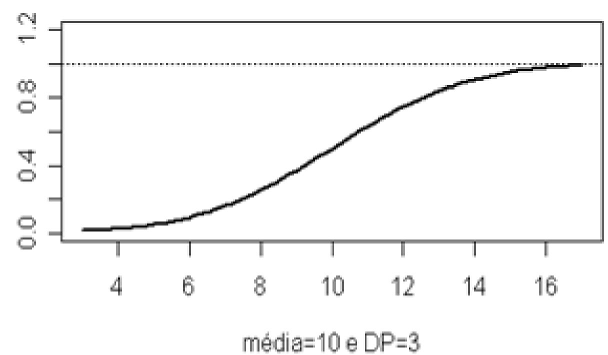
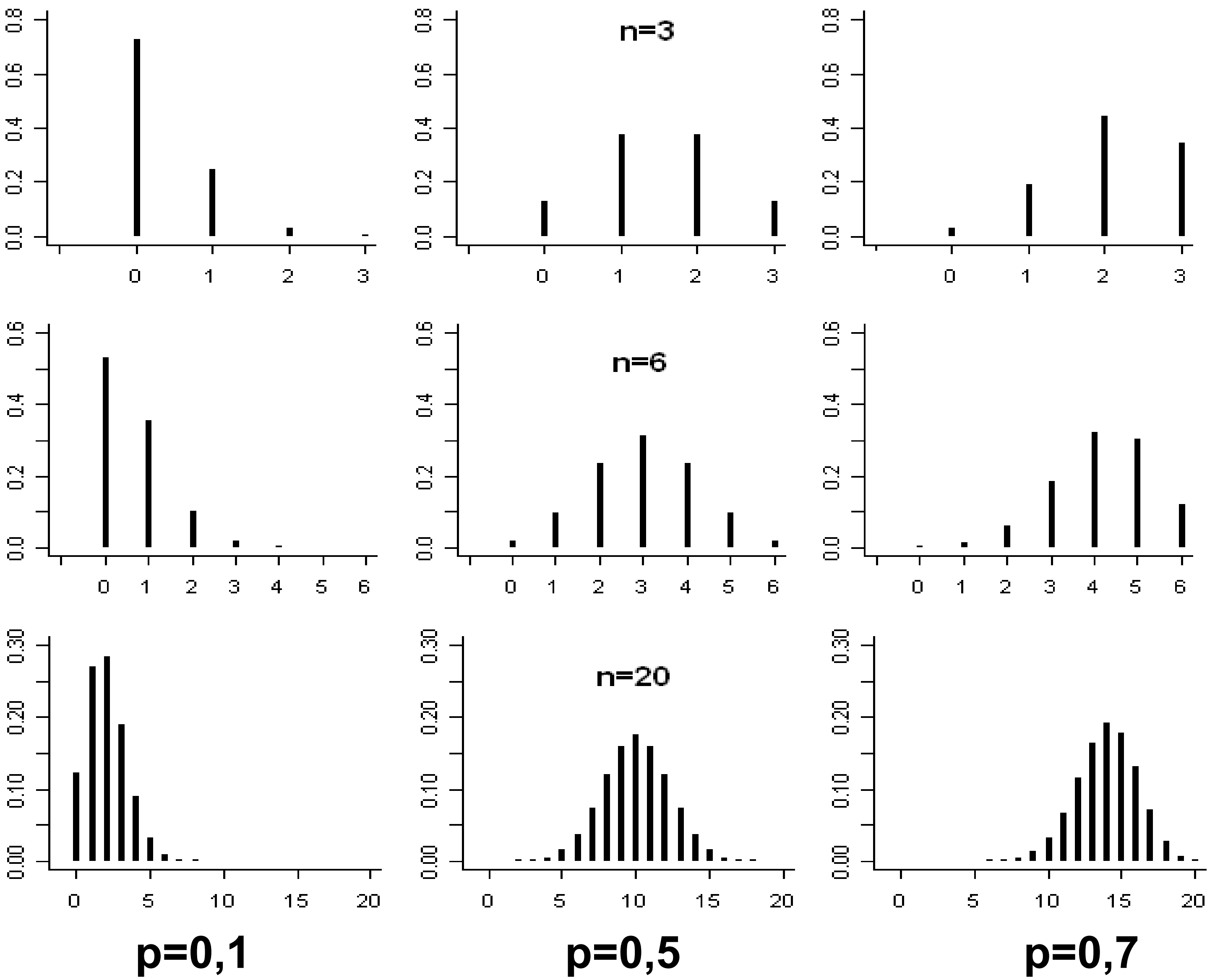


Figura 3.12 - Gráfico da FDA da Normal (μ; σ^2)

(a) Lembre-se que, em alguns exemplos anteriores de distribuições discretas, os gráficos das funções de probabilidade dos modelos **Binomial(n,p)** (Figura 2.4) e de **Poisson(λ)** (Figura 2.5) já sugeriam um **comportamento "gaussiano"**.

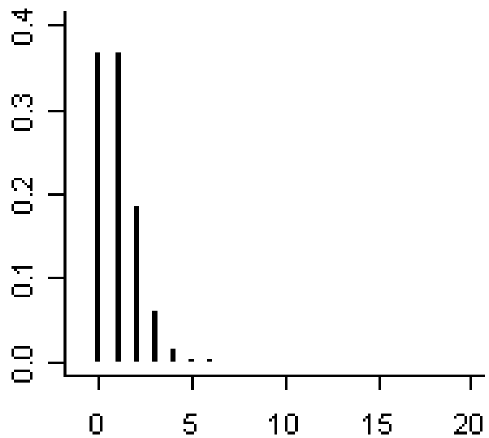
(b) Também no caso da distribuição **Gama(r; λ)**, vimos que, à medida que **r cresce (com λ fixo)**, a curva da densidade se aproxima cada vez mais de uma curva gaussiana. Como veremos no Capítulo 6, isto é uma decorrência de um dos resultados mais importantes da teoria de probabilidades, o Teorema Central do Limite.

Exemplo 2.12: A função de probabilidade da Binomial para vários n's e vários p's

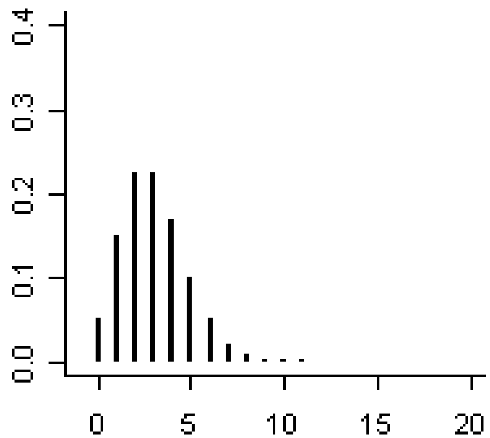


Exemplo 2.18: A função de probabilidade de uma Poisson

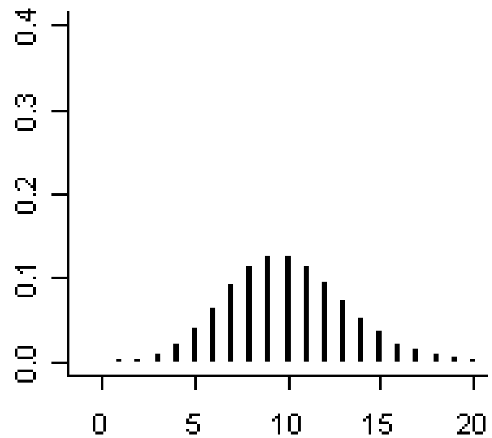
A figura a seguir exibe o gráfico das funções de probabilidade para uma distribuição de Poisson, sendo considerados três casos: $\lambda t = 1$, . $\lambda t = 3$ e $\lambda t = 10$



λt=1



λt=3



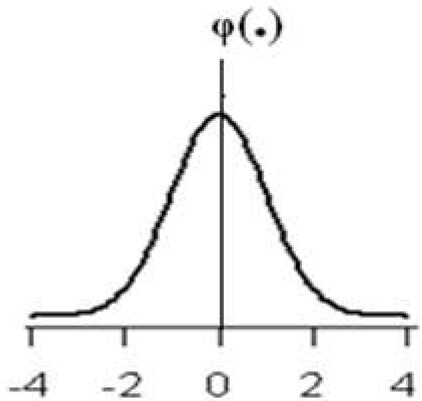
λt=10

3.5.2 Distribuição Normal Padrão

Se uma v.a. tem distribuição Normal com média igual a zero e variância igual a 1, diremos que ela tem distribuição Normal Padrão ou distribuição Normal Reduzida .

Daqui em diante serão usadas as **letras φ e Φ** para representar, respectivamente, a **função densidade** e a **função de distribuição acumulada** correspondentes à **Normal padrão e Z** para representar uma v.a. com essa distribuição. Ou seja, se **$Z \sim N(0;1)$**, então

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} \quad \text{e} \quad \Phi(z) = P(Z \le z), \quad \text{para todo z real.}$$



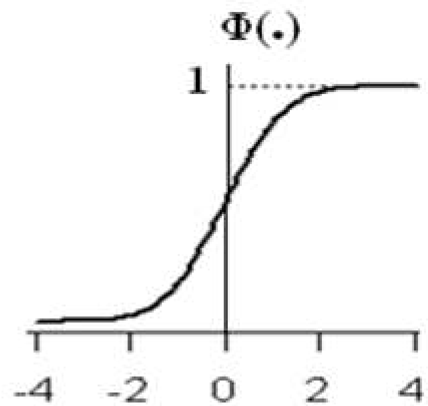


Figura 3.13 – Gráficos das funções φ(.) e Φ(.)

3.5.3 Propriedades da Distribuição Normal:

A distribuição Normal(μ, σ^2) goza de várias propriedades, entre as quais estão as seguintes:

(a) A curva da densidade da Normal é **simétrica** em relação à reta vertical que passa por $x = \mu$.

(b) Quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$, a curva da densidade da Normal se aproxima assintoticamente do eixo horizontal.

(c) A curva da densidade tem seu ponto de **máximo em $x = \mu$** e tem pontos de inflexão em **$x=\mu - \sigma$ e $x=\mu + \sigma$**.

(d) Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então $P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \cong 0{,}95$. (Ou seja, se a variável X segue uma curva Normal, em aproximadamente 95% dos casos o valor de X estará distante da média de menos de dois desvios padrões.)

As propriedades acima são obviamente válidas para a distribuição Normal padrão. Em particular, para **$Z \sim N(0, 1)$**, as propriedades descritas nos itens (a) e (c) podem ser escritas como:

a) A curva da densidade φ é **simétrica em relação à vertical $z = 0$**. Daí decorre que

a. **$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$**, para todo z real;

c) A curva da densidade φ tem seu ponto de **máximo em $z = 0$** e pontos de **inflexão em $z= -1$ e $z=1$**.

Exemplo 3.15: Distribuição do peso líquido de latas de leite em pó.

Suponha que os pesos líquidos do leite em pó contido em latas abastecidas por uma certa máquina seguem uma curva Normal com média $\mu = 300$g e desvio padrão $\sigma = 10$g.
Portanto, $\mu - 2\sigma = 300 - 2\times10 = 280$g e $\mu + 2\sigma = 300+2\times10 = 320$g.

Então podemos afirmar que:

- cerca de **95%** dessas latas têm peso líquido **entre 280g e 320g**;
- cerca de **2,5%** dessas latas têm peso líquido **inferior a 280g**;
- cerca de **2,5%** dessas latas têm peso líquido **superior a 320g**.

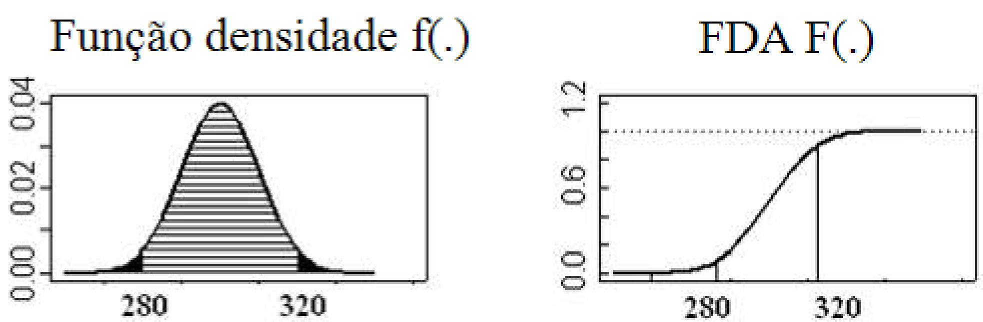


Figura 3.14 – Distribuição do peso (em g) – Densidade e FDA

Observações importantes sobre a Normal:

1. É muito comum se **representar o erro** (ou o desvio) na medição de uma grandeza por uma variável aleatória, cuja lei de probabilidade é uma **Normal centrada em zero**.
2. O **Teorema Central do Limite**, a ser abordado no Capítulo 6, é uma razão a mais para justificar a importância da distribuição Normal no contexto do Cálculo de Probabilidades.

3.5.4 Padronização

Se $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ e $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, então $Z \sim N(0,1)$.
Esta transformação da v.a. X na nova v.a. Z é chamada de padronização.

A padronização é um recurso fundamental para o cálculo de probabilidades envolvendo a distribuição Normal.

Suponha que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e desejamos calcular $P(a \le X \le b)$ para qualquer intervalo $[a,b]$. Então, fazendo a mudança de variáveis $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, obtemos:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz =$$

$$= \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \varphi(z) dz = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Observe que **o integrando da 2ª integral é exatamente $\varphi(z)$**,
o que mostra que a v.a. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ **tem de fato distribuição N(0;1)**.

Assim, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim N(0, 1)$ temos:

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Analogamente,

$$P(X \le a) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{e} \quad P(X \ge a) = P\left(Z \ge \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

3.5.4 Padronização

Se $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ e $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, então $Z \sim N(0,1)$.
Esta transformação da v.a. X na nova v.a. Z é chamada de padronização.

A padronização é um recurso fundamental para o cálculo de [...] a distribuição Normal.

Suponha que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e desejamos cal[...] intervalo $[a,b]$. Então, fazendo a mudança de variáveis **$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$** [...]

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\ldots} \ldots \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz =$$

$$\ldots \varphi(z)\,dz = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

[...] integrando da 2ª integral é exatamente $\varphi(z)$,

[...] mostra que a v.a. $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **tem de fato distribuição N(0;1).**

Podemos calcular qualquer probabilidade envolvendo a v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ usando somente a distribuição Normal Padrão. A FDA Φ da distribuição Normal Padrão apresenta a grande vantagem de se encontrar tabulada (ver Tabela I no Apêndice).

Assim, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim N(0, 1)$ temos:

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

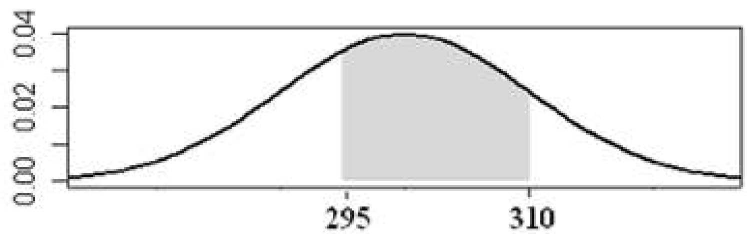
Analogamente,

$$P(X \le a) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{e} \quad P(X \ge a) = P\left(Z \ge \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

3.5.5 Uso da tabela da Normal para o Cálculo de Probabilidades

Suponha que **$X \sim N(\mu; \sigma^2)$**, queremos calcular **$P(a<X<b)$**, para um determinado intervalo (a,b). Essa probabilidade corresponderia à área sob a curva da Normal(μ, σ^2) entre x = a e x = b.

No **Exemplo 3.15**, a probabilidade de uma lata de leite sorteada ao acaso da produção total ter seu peso líquido **entre 295 e 310** gramas, corresponderia **à área sombreada** na figura, e **deveria ser calculada integrando** a correspondente densidade entre esses valores. Há, contudo, um problema: a integral indefinida da **função de densidade $N(\mu,\sigma^2)$ não tem uma expressão analítica conhecida**. Uma solução seria usando integração numérica, o que nem sempre é fácil.



$\mu = 300$, $\sigma = 10$, $a = 295$, $b = 310$

Figura 3.16 – Leite em pó: Probabilidade como área sob a curva Normal

A forma de se efetuar esse tipo de cálculo é com o auxílio de uma **Tabela de Probabilidades** que se refere especificamente à função de **distribuição acumulada $\Phi(.)$ da distribuição Normal Padrão** (Ver Tabela I).

Características da Tabela I (Apêndice).

- A tabela foi construída fazendo uso de **integração numérica** para valores de z com **duas casas decimais**.
- Aproveitando a **simetria da Normal padrão em torno de zero**, a tabela considera apenas valores positivos de z, entre **0,00 e 3,59, com passo de 0,01**.

Como utilizar a Tabela I, do Apêndice ?

A parte inteira e a primeira casa decimal de z estão representadas na borda esquerda da tabela.

- A segunda casa decimal de z está representada na borda superior da tabela.
- No corpo da tabela está o valor da probabilidade $\Phi(z)$.

Notação: Admita que $Z \sim N(0; 1)$.

- Seja $p = P(Z \leq z_p) = \Phi(z_p)$.
- z_p representa um valor qualquer da variável Z, também chamado <u>quantil</u> de Z, expresso com duas casas decimais.

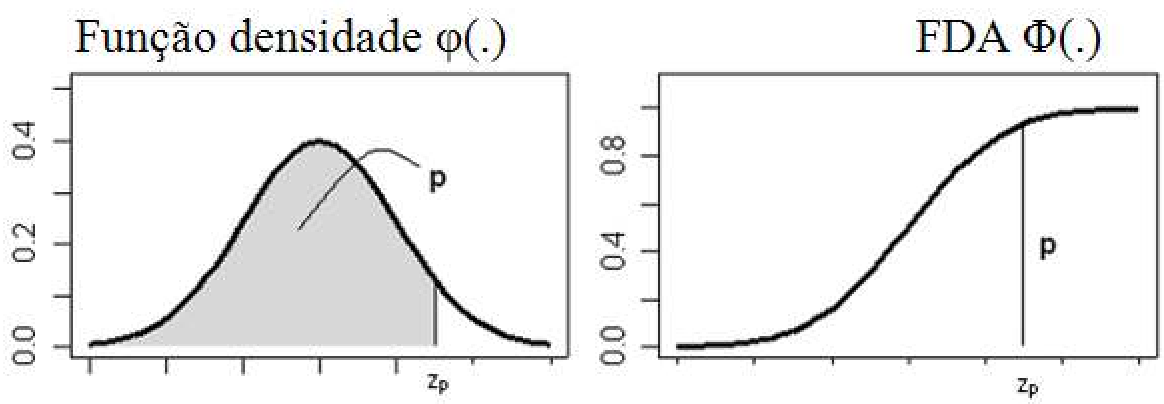


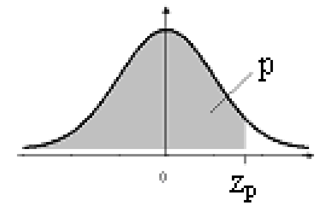
Figura 3.17 Trabalhando com a Normal Padrão

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Valor de p

$P(Z<z)=p$

Dado z com 2 casas decimais



Trabalhando com a Tabela da Normal Padrão (Tabela I do Apêndice)

A explicação será toda feita com base em exemplos numéricos.

Note que $P(Z \leq z_p) = P(Z < z_p)$, para qualquer valor de z_p, porque a variável Z é contínua.

1. **Determinação de p tal que** $p = P(Z \leq z_p) = \Phi(z_p)$, **para zp conhecido**.
   - Seja $z_p = 0{,}83$. O valor de p está no corpo da tabela, no cruzamento entre a linha 0.8 e a coluna .03 da Tabela I. Logo, p = 0,7967. Conclusão: $\Phi(0{,}83) = P(Z<0{,}83) = 0{,}7967$
   - Seja $z_p = 1{,}57$. valor de p está no corpo da tabela, no cruzamento entre a linha 1.5 e a coluna .07 da Tabela I. Logo, p = 0,9418. Conclusão: $\Phi(1{,}57) = P(Z<1{,}57) = 0{,}9418$

2. Determinação de quaisquer probabilidades relativas à Normal padrão Z

a) $P(Z>0{,}75) = 1 - P(Z<0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

b) $P(0{,}26<Z<1{,}02) = \Phi(1{,}02) - \Phi(0{,}26) = 0{,}8461 - 0{,}6026 = 0{,}2435$

c) $P(Z<-0{,}66) = P(Z>0{,}66) = 1 - \Phi(0{,}66) = 1 - 0{,}7454 = 0{,}2546$

d) $P(Z>-1{,}23) = P(Z<1{,}23) = \Phi(1{,}23) = 0{,}8907$

e) $P(-0{,}39<Z<0{,}72) = \Phi(0{,}72) - \Phi(-0{,}39) = \Phi(0{,}72) - (1 - \Phi(0{,}39))$
$= 0{,}7642 + 0{,}6517 - 1 = 0{,}4159$

f) $P(|Z|>0{,}58) = 2.P(Z>0{,}58) = 2.\ (1 - \Phi(0{,}58)) = 2 \times (1 - 0{,}7190) = 0{,}5620$

Trabalhando com a Tabela da Normal Padrão (Tabela I do Apêndice)

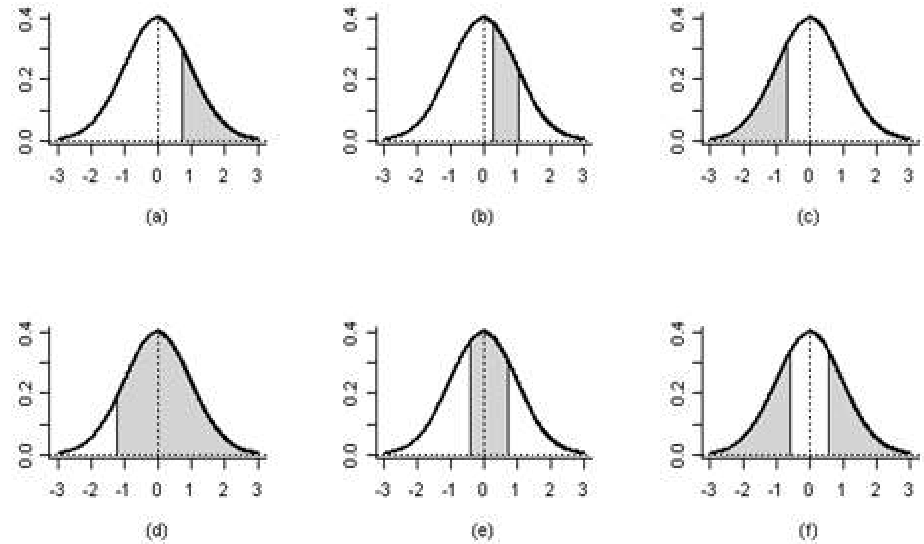


Figura 3.18 – Áreas sob a curva da Normal Padrão

2. Determinação de quaisquer probabilidades relativas à Normal padrão Z

a) $P(Z>0{,}75) = 1 - P(Z<0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

b) $P(0{,}26<Z<1{,}02) = \Phi(1{,}02) - \Phi(0{,}26) = 0{,}8461 - 0{,}6026 = 0{,}2435$

c) $P(Z<-0{,}66) = P(Z>0{,}66) = 1 - \Phi(0{,}66) = 1 - 0{,}7454 = 0{,}2546$

d) $P(Z>-1{,}23) = P(Z<1{,}23) = \Phi(1{,}23) = 0{,}8907$

e) $P(-0{,}39<Z<0{,}72) = \Phi(0{,}72) - \Phi(-0{,}39) = \Phi(0{,}72) - (1 - \Phi(0{,}39))$

$= 0{,}7642 + 0{,}6517 - 1 = 0{,}4159$

f) $P(|Z|>0{,}58) = 2.P(Z>0{,}58) = 2.\,(1 - \Phi(0{,}58)) = 2 \times (1 - 0{,}7190) = 0{,}5620$

3. **Determinação de quantil z_p da Normal padrão dada uma probabilidade** (Isto corresponde a trabalhar com a inversa da FDA de Z, isto é, $z_p = \Phi^{-1}(p)$.)

- Determinar z_p tal que $\Phi(z_p) = 0,81$.
  Procurando o valor 0,81 no corpo da tabela, vemos que ele se encontra no cruzamento entre a linha 0,8 e a coluna 0,08, portanto $z_p \cong 0,88$.
- Determinar z_p tal que $P(Z > z_p) = 0,73$.
  $P(Z > z_p) = 1 - \Phi(z_p) = 0,73 \Rightarrow \Phi(z_p) = 0,27$
  A Tabela só permite trabalhar com valores de $\Phi(.) \geq 0,5$.
  Sabemos que $\Phi(-z_p) = 1 - \Phi(z_p) = 0,73$
  Daí, $-z_p \cong 0,61$ e então, $z_p \cong -0,61$.
- Determinar z_p tal que $P(|Z| < z_p) = 0,16$.
  Como $P(|Z| < z_p) = P(-z_p < Z < z_p) = \Phi(z_p) - \Phi(-z_p) =$
  $= \Phi(z_p) - (1 - \Phi(z_p)) = 2.\ \Phi(z_p) - 1$, temos
  $\Phi(z_p) = \dfrac{1,16}{2} = 0,58$, logo $z_p \cong 0,20$.

4. **Determinação de quaisquer probabilidades relativas a Normal genérica**

- Se $X \sim N(8; 9)$, $P(7<X<10) = ?$
  $P(7<X<10) = P(\frac{7-8}{\sqrt{9}} < \frac{X-8}{\sqrt{9}} < \frac{10-8}{\sqrt{9}}) = P(\frac{7-8}{3} < Z < \frac{10-8}{3}) = P(-0,33 < Z < 0,67) =$
  $= \Phi(0,67) - \Phi(-0,33) = \Phi(0,67) + \Phi(0,33) - 1 = 0,7486 + 0,6293 - 1 = 0,3779.$
  Observe que, para garantir a equivalência entre as condições $(7<X<10)$ e $(\frac{7-8}{\sqrt{9}} < \frac{X-8}{\sqrt{9}} < \frac{10-8}{\sqrt{9}})$, as mesmas operações têm que ser aplicadas aos três membros da desigualdade. Também pode-se usar diretamente $P(7<X<10) = = \Phi(\frac{10-8}{\sqrt{9}}) - \Phi(\frac{7-8}{\sqrt{9}})$.
- Se $X \sim N(20,16)$, $P(X>23) = ?$
  $P(X>23) = 1 - P(X \leq 23) = 1 - \Phi(\frac{23-20}{4}) = 1 - \Phi(0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266.$

5. Determinação de quantil de Normal genérica dada uma probabilidade

- Se $X \sim N(20;25)$ e $P(X>b) = 0{,}60$, então $b = ?$

  $P(X>b) = 1 - \Phi(\frac{b-20}{5}) = 0{,}60 \Rightarrow \Phi(\frac{b-20}{5}) = 0{,}40$; como esse valor é menor que 0,5 devemos considerar $\Phi(\frac{20-b}{5}) = 1 - \Phi(\frac{b-20}{5}) = 1 - 0{,}40 = 0{,}6$.

  Da Tabela Normal: $\frac{20-b}{5} = 0{,}25 \Rightarrow b = 20 - 5\times 0{,}25 = 18{,}75$

6. Determinar parâmetro de Normal genérica dada uma probabilidade

Exemplo:

- Se $X \sim N(\mu;25)$ e $P(X<32) = 0{,}35$, então $\mu = ?$

  Temos $P(X<32) = \Phi(\frac{32-\mu}{5}) = 0{,}35 \Rightarrow \Phi(\frac{\mu-32}{5}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$ (porque $0{,}35 < 0{,}5$)

  Da Tabela Normal: $\frac{\mu-32}{5} = 0{,}39 \Rightarrow \mu = 32 + 5\times 0{,}39 = 33{,}95$

Exemplo 3.17: Carga de ruptura de um cabo de aço

A carga de ruptura de cabos de aço de 8 mm, usados em guinchos e produzidos por uma certa Companhia têm uma distribuição Normal com média de 2210 kg e desvio-padrão de 25 kg. A especificação mínima para a dita carga é de 2180 kg. Cabos com carga de ruptura entre 2130 e 2180 kg ainda podem ser comercializados, porém a um preço menor, enquanto que se tiverem carga de ruptura inferior a 2130kg devem ser descartados.

a) Qual a porcentagem de cabos que satisfazem a especificação?
b) Qual a porcentagem de cabos que, mesmo não satisfazendo a especificação, poderiam ser vendidos?
c) Qual a porcentagem de cabos que deveriam ser descartados?

Solução : Seja X a v.a. que representa a carga de ruptura, em kg, dos cabos de aço, $X \sim N(2210, 25^2)$.

(a) Os cabos satisfarão a especificação se $X>2180$.

$$P(X>2180) = 1 - \Phi\left(\frac{2180-2210}{25}\right) = 1 - \Phi(-1{,}2) = \Phi(1{,}2) = 0{,}8849$$

Aproximadamente 88,5% dos cabos produzidos satisfazem as especificações.

(b) $$P(2130 < X < 2180) = \Phi\left(\frac{2180-2210}{25}\right) - \Phi\left(\frac{2130-2210}{25}\right) = \Phi(-1{,}2) - \Phi(-3{,}2) =$$
$$= \Phi(3{,}2) - \Phi(1{,}2) = 0{,}9993 - 0{,}8849 = 0{,}1144.$$

Aproximadamente 11,4% dos cabos podem ser vendidos a um preço inferior.

(c) $$P(X<2130) = \Phi\left(\frac{2130-2210}{25}\right) = \Phi(-3{,}2) = 1 - \Phi(3{,}2) = 1 - 0{,}9993 = 0{,}0007$$

Portanto, deveriam ser descartados aproximadamente 0,07% dos cabos produzidos.

Exemplo 3.18: Tempo (em minutos) necessário para executar uma tarefa

Suponha que o tempo X, em minutos, que uma pessoa leva para executar determinada tarefa varia conforme uma distribuição Normal com parâmetros μ (média) e σ (desvio padrão). Suponha também que a probabilidade de que a tarefa seja executada em no máximo 70 minutos é 0,75 e a probabilidade de que a tarefa seja executada no máximo 50 minutos é 0,25.

(a) Determine os valores de μ e σ.

(b) De todas as pessoas que necessitam de pelo menos 75 minutos para executá-la, que percentagem precisará de mais de 85 minutos?

Solução: Sabemos que X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2. Isto implica que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tem distribuição Normal padrão, isto é, com esperança 0 e desvio padrão 1.

(a) Então $0,75 = P(X \leq 70) = \Phi(\frac{70-\mu}{\sigma}) \Rightarrow \frac{70-\mu}{\sigma} = 0,67$,

Analogamente, $0,25 = P(X \leq 50) = \Phi(\frac{50-\mu}{\sigma}) \Rightarrow \frac{50-\mu}{\sigma} = -0,67$.

Ficamos então com um sistema de 2 equações a duas incógnitas: μ e σ. Resolvendo esse sistema, temos $\mu = 60$ e $\sigma = 14{,}9$, ambos em minutos.

(b) Temos que calcular uma probabilidade condicional, a saber,

$$P(X>85|X>75) = \frac{P(X>85)}{P(X>75)} = \frac{1-\Phi(\frac{85-60}{14,9})}{1-\Phi(\frac{75-60}{14,9})} = \frac{1-\Phi(1{,}68)}{1-\Phi(1{,}01)} = \frac{0{,}0465}{0{,}1562} = 0{,}2977$$

Ou seja, 29,8% das pessoas que executam a tarefa em pelo menos 75 minutos, levam no mínimo 85 minutos nessa atividade.