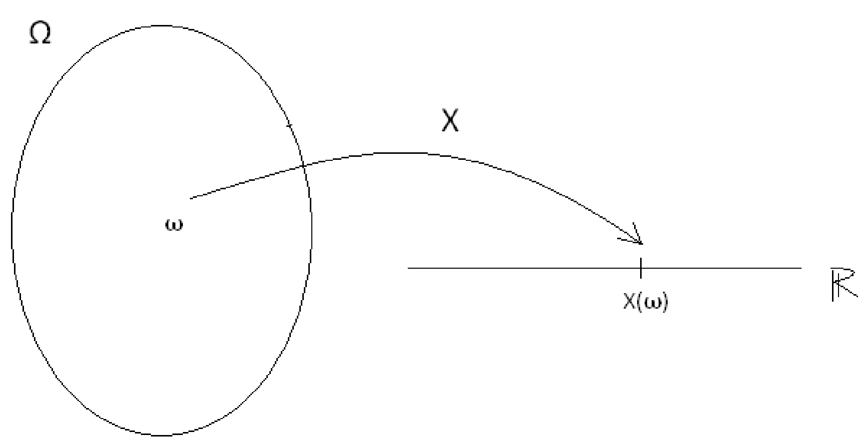
CAPÍTULO 2

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Conceitos a serem introduzidos neste capítulo:
Variável aleatória
Variável aleatória discreta e Variável aleatória contínua
Função de probabilidade de uma variável aleatória discreta
Função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta
Média Populacional ou Esperança de uma variável aleatória discreta
Variância, desvio padrão e coeficiente de variação de uma v.a. discreta
Modelos discretos: Bernoulli, Binomial, Geométrica, Pascal, Hipergeométrica, Poisson



"A probabilidade é a expectativa fundada no conhecimento parcial. Um perfeito conhecimento de todas as circunstâncias que afetam a ocorrência de um determinado evento iria transformar essa expectativa em certeza, e não sobraria espaço nem necessidade para uma teoria das probabilidades."

George Boole, matemático

Sexta feira à tarde. Está chegando a hora de ir para a balada. O celular de Cesar não para de tocar. O fim de semana promete: sexta à noite, a turma toda vai para o Baixo Gávea; sábado, praia o dia inteiro; sábado à noite, festa na casa da Claudinha; domingo, Fla x Flu no Engenhão.

Mas, de repente Cesar se lembra de que tem uma prova de Matemática na 2ª feira e está totalmente "por fora" da matéria. E o pior é que se ele não conseguir uma boa nota, estará reprovado.

E agora, o que fazer?

Bem, essa prova terá apenas 3 questões de múltipla escolha, cada uma delas com 5 opções de resposta. E basta ele acertar 2 dessas questões para ser aprovado.

Imediatamente Cesar tem uma idéia tentadora, que lhe permitirá passar mais um fim de semana longe dos livros: "E se eu simplesmente chutar as respostas das questões? Quem sabe eu estou no meu dia de sorte e acabo me dando bem?"

<u>Exemplo</u> : Escolhendo as respostas ao acaso em prova de múltipla escolha

•Calculemos a probabilidade de Cesar ser bem sucedido em sua prova de Matemática.

•Para cada questão representemos por A o fato de a resposta estar correta e por E errada.

•Cada resultado do espaço amostral Ω será uma seqüência de A's e E's.

•Há 8 de tais seqüências, assim sendo **Ω = {AAA, AAE, AEA, EAA, AEE, EAE, EEA, EEE}**. As probabilidades correspondentes são obtidas lembrando que para cada questão a probabilidade de acerto é 0,2 e a de erro é 0,8.

•Alem disso, cada resposta da prova é escolhida de forma independente pelo estudante.

•Seja **X** a v.a. que representa a quantidade de respostas certas entre as três,

•**X** pode assumir os valores 0, 1, 2 ou 3.

Observe a tabela:

Ω	**EEE**	**AEE, EAE, EEA**	**AAE,AEA, EAA**	**AAA**
k = número de respostas certas	0	1	2	3
P(X=k)	0,512	0,384	0,096	0,008

Cesar será aprovado se X for maior ou igual a 2,

$$P(X \geq 2) = P(X=2 \text{ ou } X=3) = P(X=2) + P(X=3) = 0,096 + 0,008 = 0,104,$$

Note que as probabilidades dos diferentes valores de **X** foram calculadas a partir da associação de cada valor de **X** com **um subconjunto do espaço amostral Ω.**

Exemplo 2.1: Será que a memória do PC vai aumentar?

Humberto deseja aumentar a capacidade de memória RAM do seu microcomputador. A placa mãe do PC de Humberto permite a instalação de até quatro pentes de memória e atualmente só possui um pente. Ele vai a um posto de revenda de computadores e solicita a compra e instalação de mais 3 pentes de memória, idênticos ao atual. Na loja há 12 pentes com esta característica. O que Humberto não sabe, e o técnico também não, é que dentre os 12 há 4 pentes defeituosos. Se os três pentes novos forem escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que:

a) a capacidade de memória do PC realmente aumente?

b) o PC continue com a capacidade de memória original?

Solução:

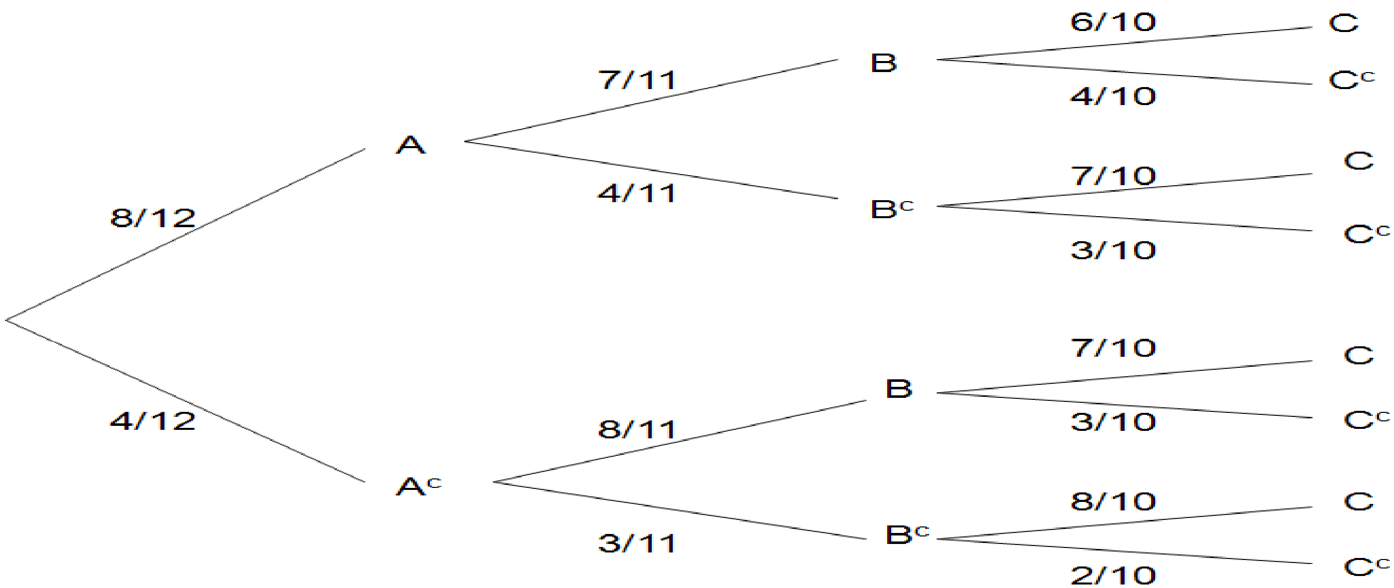
A capacidade de memória do PC realmente aumentará se pelo menos um dos 3 pentes novos for perfeito e não aumentará se todos os 3 forem defeituosos.

Denotemos por A, B e C, respectivamente os eventos: “o primeiro pente selecionado é perfeito (não defeituoso)”, “o segundo pente é perfeito”, “o terceiro pente é perfeito”.
Assim, teremos um espaço amostral não uniforme, dado por:

$$\Omega = \{ABC,\ ABC^C, AB^CC, A^CBC, AB^CC^C, A^CBC^C, A^CB^CC, A^CB^CC^C\}$$

Exemplo 2.1: Será que a memória do PC vai aumentar?

A probabilidade de cada elemento do espaço amostral pode ser calculada usando-se o Diagrama de Arvore descrito na Figura.



Em Ω k = nº de peças perfeitas	$A^cB^cC^c$ 0	AB^cC^c, A^cBC^c, A^cB^cC 1	ABC^c, AB^cC, A^cBC 2	ABC 3
P(X=k)	0,018	0,218	0,509	0,255

a) **$P(X \geq 1) = P(\{X=1\} \cup \{X=2\} \cup \{X=3\}) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}982$**

b) **$P(X=0) = 0{,}018$**

Exemplo 2.2: Variáveis aleatórias do nosso cotidiano

a) Karen é analista química e deseja submeter uma amostra de água a um teste de alcalinidade. Para isso mede 100 ml da água a ser analisada, coloca-os em um balão de *Erlenmeyer* e acrescenta 3 gotas de fenolftaleína. Se a solução se tornar rósea, ela é titulada adicionando – com uma bureta graduada – gotas de ácido sulfúrico de uma dada concentração, até o descoramento total. Karen anota, então, o número de gotas que se revelou necessário (o que lhe permite determinar o volume de ácido usado).

Neste caso podemos considerar a v. a. como sendo X, o número de gotas de ácido sulfúrico e, se a alcalinidade é alta, a probabilidade de que tenham sido necessárias pelo menos 2 gotas – ou seja, $P(X \geq 2)$ – também deve ser alta.

b) Jaime é um engenheiro encarregado de realizar estudos ergonômicos em uma empresa. Ele mede o tempo que os operários gastam em executar certas tarefas. Naturalmente para cada tarefa o tempo gasto depende do treino e da destreza do operário. Suponha que, para uma particular tarefa, o tempo médio gasto é de 285 segundos.

Aqui a variável aleatória é X = tempo em segundos gasto na execução da tarefa e tudo indica que, para um operário novato, pouco treinado, é alta a probabilidade $P(X > 285)$.

No exemplo da memória, X pode ser visto como uma variável que assume certos valores aleatoriamente, com uma probabilidade conhecida de assumir cada valor. Por esse motivo ela é chamada de variável aleatória (v.a.).

Observamos que existe uma equivalência entre:

Ω = {$ABC, ABC^C, AB^CC, A^CBC, AB^CC^C, A^CBC^C, A^CB^CC, A^CB^CC^C$} **e**

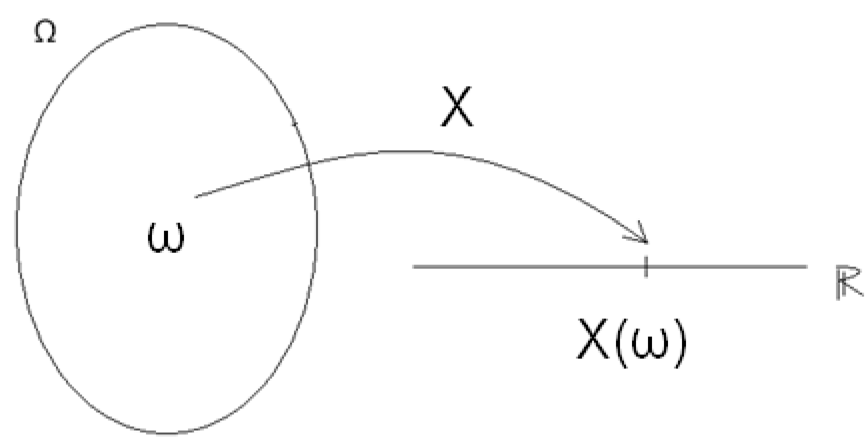
R_X = {0, 1, 2, 3}

Além disso, a qualquer elemento ω de Ω corresponde um único valor real $x = X(\omega)$.

Portanto, a variável aleatória X é, de fato, uma função com domínio Ω e com contra-domínio R_X, formado por números reais.

Uma <u>variável aleatória</u> (abreviadamente, v.a.) é uma função que associa a cada elemento de um espaço amostral um número real.

Se X é uma variável aleatória, então a cada elemento ω do espaço amostral Ω corresponde um único número real X(ω)



Variáveis Aleatórias - O Caso Discreto

A variável do Exemplo 2.1, que pode assumir somente os valores 0, 1, 2 e 3, é um exemplo de variável aleatória (v.a.) discreta.

Mais geralmente, podemos apresentar a seguinte definição:

Seja X uma variável aleatória. Diremos que X é uma v. a discreta se o número de valores que ela pode assumir é finito ou infinito enumerável.

Exemplo 2.3: Detectando peças defeituosas

Em uma linha de produção são examinadas as peças produzidas até se encontrar 10 peças defeituosas e o número total de peças examinadas é anotado. Neste caso a v.a. **X é o número total de peças examinadas.** Notemos que X pode assumir os valores 10, 11, 12, 13, 14... . Assim sendo claramente X é uma v.a aleatória discreta. A lógica indica que ela deveria ter **um número finito de valores**. Contudo, em uma situação desta natureza sabemos que deveria haver um **limite superior**, porém desconhecemos qual este valor poderia ser. Por esse motivo, em uma idealização do problema podemos considerar que o conjunto de valores possíveis da variável **X é infinito enumerável**.

Distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta

Consideremos inicialmente o caso em que o conjunto de valores possíveis da v.a. é finito.

Suponha que X é uma v.a. cujos valores possíveis são os elementos do conjunto $\Omega_X = \{ x_1 , x_2, x_3, \ldots , x_N\}$ de números reais. Suponha também que para cada ponto x_i de Ω_X está definida uma probabilidade $p(x_i) = P(X = x_i)$ de tal forma que:

a) $p(x_i) \geq 0$, para todo i (i=1,2,3,....N)

b) $\sum p(x_i)= 1$

Então $p: x_i \rightarrow p(x_i) = P(X = x_i)$ é chamada de <u>Função de Probabilidade de X</u> .

A Função de Probabilidade determina a distribuição da v.a. discreta X, ou seja, o seu modelo probabilístico.

Se X for uma v.a. discreta com um conjunto infinito de valores possíveis $\Omega_X = \{ x_1 , x_2, x_3, \ldots\}$ a definição é a mesma somente fazendo com que a propriedade (b) passe a ser $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

A Função de Distribuição Acumulada de uma v.a. discreta

Em geral, para qualquer variável aleatória discreta com valores possíveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, os eventos $\{X=x_1\}$, $\{X=x_2\}$, $\{X = x_3\}$, ..., $\{X=x_n\}$ são mutuamente exclusivos.

Portanto, sendo $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, temos, por exemplo:

$$P(X \leq x_5) = P(X=x_1) + P(X=x_2) + P(X=x_3) + P(X=x_4) + P(X=x_5) = \sum_{i=1}^{5} p(x_i)$$

Além da Função de Probabilidade há uma outra função que também é usada para caracterizar a distribuição de uma variável aleatória.

A Função de Distribuição Acumulada de uma variável aleatória discreta X, denotada por F é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i), \text{ para todo real } x$$

Propriedades da Função de Distribuição Acumulada F

1. **F é uma função não decrescente; isto é, $x < y$ implica $F(x) \leq F(y)$.**
2. **$\lim_{x \to -\infty} F(x)=0$**
3. **$\lim_{x \to \infty} F(x)=1$**
4. **O gráfico de F tem o aspecto de uma "função escada", que sobe um degrau de altura p(x) no ponto x, sempre que p(x) > 0.**

Exemplo 2.5.: Uma vez mais, os pentes. Retornemos à v.a X do Exemplo 2.1.

A sua Função de Distribuição Acumulada é calculada como se segue:

Se $x < 0$ teremos $F(x) = P(X \leq x) = 0$,

Se $0 \leq x < 1$, o único valor possível de X é 0. $F(x) = P(X \leq x) = P(X=0)=0{,}018$.

Para $1 \leq x < 2$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}018 + 0{,}218 = 0{,}236$.

Para $2 \leq x < 3$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

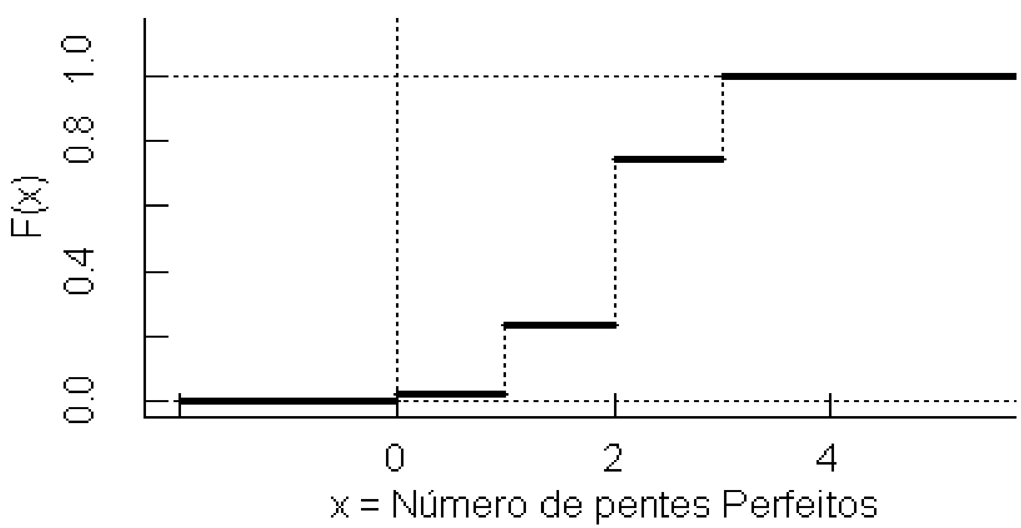
$= 0{,}018+0{,}218+0{,}509 = 0{,}745$.

Para $x \geq 3$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$.

Em resumo:

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0{,}018, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}236, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}745, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}
$$

O gráfico da Função de Distribuição Acumulada para a v.a. é X:



Exemplo : Total de pontos no lançamento de 2 dados

Consideremos novamente o experimento que consiste no lançamento de 2 dados.

A variável aleatória X a ser considerada aqui é a soma dos pontos nos 2 dados.

O espaço amostral Ω é composto de 36 elementos que são os pares

(resultado do 1º lançamento, resultado do 2º lançamento).

É claro que, considerando D1 e D2 lançamentos independentes, todos esses pares têm a mesma probabilidade 1/36 de ocorrer.

Soma dos pontos nos 2 dados: D1 e D2

D2 \ D1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A variável aleatória X é tal que:

$X(1,1) = 2,$

$X(1,2) = X(2,1) = 3$

$X(1,3) = X(2,2) = X(3,1) = 4$

$\vdots$

$X(5,6) = X(6,5) = 11$

$X(6,6) = 12$

Neste exemplo os valores possíveis de X são 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Função de Probabilidade do número total de pontos no lançamento de 2 dados

2.4 Esperança e Variância de uma variável aleatória discreta.

Além das funções de probabilidade e de distribuição acumulada existem quantidades que permitem caracterizar adicionalmente a distribuição de uma variável aleatória discreta. Elas são conhecidas comumente como **parâmetros da distribuição**.

Os mais freqüentemente usados são os parâmetros de centralidade e os parâmetros de dispersão, que definimos a seguir.

A média ou valor esperado de uma variável aleatória discreta X é uma medida de centralidade. Ela é também denominada esperança, por isso sua notação é E(X).

Se X é uma variável aleatória discreta que assume os valores x_1, x_2, x_3, ... com probabilidades $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$, ... , respectivamente, então sua média ou esperança é

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

se a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ converge absolutamente , ou seja, se $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\, p(x_i)$ é finita.

Nota: Se a v.a discreta X tiver apenas N valores possíveis x_1, x_2, ...x_N com probabilidades $p(x_1)$, $p(x_2)$,..., $p(x_N)$ teremos $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p(x_i)$. Neste caso, a sua esperança é calculada como a média ponderada dos valores que essa variável assume, sendo o peso de cada valor igual à probabilidade. **Note que nesta média ponderada não foi necessário dividir pela soma dos pesos, já que ela é igual a 1**.

Interpretação física da média ou esperança de uma v.a discreta:

Se pensarmos na função p como uma distribuição discreta de massa, onde a massa localizada no ponto de abscissa x_i é $p(x_i)$, então podemos perceber que E(X) corresponde exatamente à abscissa do centro de gravidade dessa distribuição.

Exemplo 2.6 . Revisitando os pentes de memória

Consideremos novamente a v.a. X , número de pentes não defeituosos, do Exemplo 2.1.

A média da v. a. X, é:

$$E(X) = 0 \times 0{,}018 + 1\times0{,}218 + 2\times0{,}509 + 3\times0{,}255 = 2{,}0$$

Isto significa que se o mesmo experimento – selecionar ao acaso três pentes de um conjunto de 12, dentre os quais há 4 defeituosos – for repetido um número muito grande de vezes sob as mesmas condições, em média serão selecionados 2 pentes não defeituosos.

Observação: Em geral, ao contrário do ocorrido no exemplo 2.6, a esperança não é necessariamente um valor possível da variável X, o que, na Física, equivale a dizer que o centro de gravidade não se encontra necessariamente em algum ponto em que uma força é aplicada.

Medidas de Dispersão

O simples conhecimento da média de uma variável aleatória X, em geral, não é suficiente para se ter uma idéia clara da distribuição de X.

Suponha que sabemos que a média de mensagens via e-mail recebidas diariamente por uma pessoa é de 20. Isto pode significar que a pessoa recebe todos os dias um número de mensagens próximo de 20 – digamos, entre 18 e 22. Ou então, que ela recebe muitas mensagens em alguns dias – digamos, ao redor de 50 –, e em outros dias um número muito pequeno – por exemplo, em torno de 5 –, perfazendo igualmente uma média de 20.

Existe assim uma necessidade de se ter uma medida adicional que permita quantificar o grau de dispersão dos valores de X.
As medidas de dispersão mais freqüentemente empregadas são

a variância e

o desvio-padrão.

Variância

Se X é uma variável aleatória discreta que assume os valores x_1, x_2, x_3, ... com probabilidades $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$, ... respectivamente, e se E(X) é finito, então sua <u>variância</u> é calculada por :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2\, p(x_i)$$

Diremos que Var(X) existe e é finita se a série da direita for convergente.

Interpretação física da variância de uma v.a discreta:

Fazendo novamente um paralelo com a Mecânica, vemos que Var(X) corresponde exatamente ao momento de inércia da distribuição discreta de massa representada pela função de probabilidade p em relação a um eixo vertical que passa pelo ponto de abscissa E(X). Var(X) é a média ponderada dos valores $(x_i - E(X))^2$, sendo o peso do i - ésimo valor igual a $P[X = x_i]$.

Note que a unidade de medida da variância é o quadrado da unidade de medida da respectiva variável. Portanto uma alternativa para mensurar a dispersão é através do chamado desvio padrão, que é medido na mesma unidade da variável.

O <u>**desvio padrão**</u> de X é: DP(X) = $\sqrt{Var(X)}$

<u>**Obs.:**</u> A variância de X também pode ser calculada pela expressão

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (x_1^2.P[X = x_1] + x_2^2.P[X = x_2] + \ldots) - \{E(X)\}^2$$

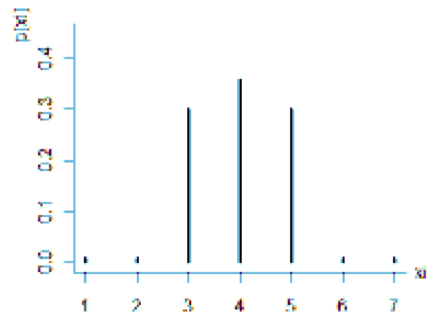
Variância

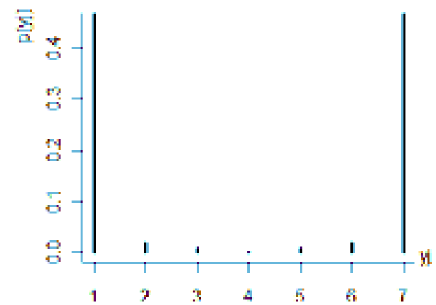
<u>Exemplo 2.7</u>: Comparando variâncias

Consideremos as v.a's X e Y com suas correspondentes funções de probabilidade :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$p(x_i)$	0,01	0,01	0,30	0,36	0,30	0,01	0,01

y_j	1	2	3	4	5	6	7
$p(y_j)$	0,47	0,02	0,01	0,00	0,01	0,02	0,47





Podemos verificar facilmente que E(X) = E(Y) = 4.

Contudo, é fácil ver que X e Y têm distribuições bem diferentes.
A v.a. X tem como valores mais prováveis os valores centrais, 3, 4 e 5 , com prob. pequenas para os demais valores;
A v.a. Y, os seus valores extremos, 1 e 7, são os mais prováveis.

Vejamos como essa diferença se expressa em termos das suas variâncias.

$$Var(X) = 1^2(0{,}01)+2^2(0{,}01) +3^2(0{,}30) + 4^2(0{,}36) +5^2(0{,}30) +6^2(0{,}01)+7^2(0{,}01) - 4^2 = 0{,}86$$

$$Var(Y) = 1^2(0{,}47)+2^2(0{,}02)+3^2(0{,}01)+4^2(0)+5^2(0{,}01)+6^2(0{,}02)+7^2(0{,}47) - 4^2 = 8{,}64$$

Observamos que, como era de se esperar, Var(Y) é muito maior que Var(X) já que os valores de Y são bem mais dispersos com relação à media que os de X.

Também temos : DP(X) = = 0,93 e DP(Y) = = 2,94.

Desta maneira podemos usar a variância ou o desvio-padrão para quantificar o grau de dispersão em torno da média de uma variável aleatória.

A variância é um conceito importante no Controle Estatístico da Qualidade

Define-se a qualidade de um produto como sendo inversamente proporcional à sua variabilidade. Defíne-se Melhoria da Qualidade como sendo a redução da variabilidade do processo produtivo.

O <u>coeficiente de variação</u> de uma variável aleatória é igual ao quociente entre o desvio-padrão e a média :

CV(X) =DP(X)/E(X) (desde que E(X) seja não-nulo)

Comumente o coeficiente de variação é expresso como porcentagem.

<u>Exemplo 2.8</u> : Coeficientes de variação

Para as variáveis X e Y do Exemplo 2.7, temos:

E(X) = E(Y) = 4 ; DP(X) = 0,93 ; DP(Y) = 2,94.

Assim sendo, **CV(X) = 0,2325 (ou 23,25%) e CV(Y) = 0,735 (ou 73,5%)**

<u>Exemplo 2.9</u> : Ainda os pentes de memória defeituosos.

Aqui encontramos E(X) = 2,0. Por outro lado,

V(X) = 02(0,018)+12(0,218)+22(0,509)+32(0,255) – (2)2 = 0,555 e

DP(X) = 0,738.

Portanto, **CV(X) = 0,369 (ou 36,9%)**

Como o coeficiente de variação é uma grandeza adimensional, é sempre possível comparar duas variáveis através desse indicador.

Podemos dizer que, em termos relativos, a variabilidade do número de pentes de memória perfeitos está compreendida entre as variabilidades das variáveis X e Y do Exemplo 2.9 .

Famílias de Distribuições mais importantes

O modelo de Bernoulli

Dado p, $0 < p < 1$, uma variável aleatória X que assume os valores 0 (fracasso) ou 1 (sucesso) de tal forma a que

$$P(X = 1) = p \quad e \quad P(X = 0) = 1 - p$$

tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

É fácil ver que neste caso $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$

Exemplo 2.10: Alguns modelos de Bernoulli.

a) Numa turma com 50 alunos dos quais 30 são homens e 20 mulheres, escolhe-se um aluno ao acaso. Se levarmos em consideração apenas o sexo do aluno selecionado trata-se de um ensaio de Bernoulli. Se considerarmos como sucesso a escolha de uma mulher, teremos $p = 0{,}4$ e $1–p = 0{,}6$.

b) A escolha ao acaso de **um** pente de memória RAM de uma caixa com 12 pentes com 8 perfeitos e 4 defeituosos é um ensaio de Bernoulli. Entendendo como sucesso a seleção de um pente perfeito temos $p = 8/12 = 2/3$ e $1 – p = 1/3$

c)Se em uma transmissão digital 15% dos bits são transmitidos com erro , e entendemos como sucesso a transmissão perfeita, teremos, para cada bit,

$p = 0{,}85$ e $1 – p = 0{,}15$.

O modelo Binomial

No modelo Binomial um mesmo experimento de Bernoulli é repetido n vezes, independentemente, e a v.a. de interesse representa o número de sucessos a serem obtidos nos n ensaios.

Sejam p e (1–p), respectivamente, as probabilidades de sucesso e de fracasso em cada ensaio de Bernoulli. Se os resultados de cada ensaio são denotados por S (sucesso) e F (fracasso) teremos, para cada ensaio, $P(S) = p$ e $P(F) = 1-p$.

O espaço amostral do experimento resultante dos n ensaios de Bernoulli será composto por resultados que podem ser escritos como uma seqüência de letras S e F. Em particular, um resultado com k sucessos e (n – k) fracassos pode ser descrito, sem perda de generalidade, como uma seqüência de k S´s, seguida de (n–k) F´s , como a seguinte: SSSSSS...SFFF...FF

Como os n ensaios são independentes, a probabilidade de ocorrência deste particular resultado é $p^k(1-p)^{n-k}$.

Ora, o evento "k sucessos e (n–k) fracassos" pode ocorrer de diversas outras maneiras.

O cálculo do número de maneiras de se obter "k sucessos e (n – k) fracassos" foi visto na seção 1.7, ou seja,é o número de combinações de n objetos tomados de k em k:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ .$$

<u>O modelo Binomial</u>

$0 < p < 1$, e n inteiro positivo, seja X o número de sucessos Dados p, obtidos em n ensaios de Bernoulli independentes onde, em cada um deles, P(sucesso) = p e P(fracasso) = 1 - p

Neste caso diz-se que X tem <u>distribuição Binomial com parâmetros</u> <u>n</u> e <u>p:</u>

$$\mathbf{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n}$$

Prova-se que: $E(X) = n\,p$ e $Var(X) = n\,p\,(1-p)$.

Notas:

Observe que P(X=k) corresponde ao termo geral do desenvolvimento do binômio de Newton $[p + (1-p)]^n$. Portanto, $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p+(1-p))^n = 1$

Escreve-se $X \sim Bin(n, p)$ para significar que X segue o modelo Binomial com parâmetros n e p.

Os valores das probabilidades relativas a uma Binomial podem ser obtidos diretamente a partir de um software adequado, por exemplo o **R**.

<u>Exemplo 2.11:</u> Vírus no computador

Em geral, em cerca de 80% dos chamados que um certo técnico em computação recebe para resolver panes nos computadores dos seus clientes, ele constata que o problema decorreu da presença de algum vírus. Suponha que em um determinado dia, esse técnico vai visitar 6 clientes seus, cujos computadores estão precisando ser consertados e admita também que os 6 clientes não se comunicam através de computador (o que garante a independência da existência de vírus em cada computador). Calcule a probabilidade de que:

a) **Pelo menos 4 entre os 6 computadores estejam com vírus.**
b) **No máximo 2 entre eles estejam com vírus.**
c) **Todos os 6 estejam com vírus.**

Solução do Exemplo 2.11 :

Considere:

Sucesso = "o defeito no computador é devido a presença de vírus" ($p = P(\text{sucesso}) = 0{,}80$)

X = **número de computadores com vírus entre os 6 a serem consertados**.

Então X ~ **Bin(6; 0,80)**

a) $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 0{,}90112$.
Isso significa que é bem alta a probabilidade de pelo menos 4 entre os 6 computadores estarem com vírus.

b) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}01696$
Este valor indica que é baixíssima a probabilidade de que no máximo 2 deles estejam com vírus.

c) $P(X = 6) = \mathbf{0{,}80^6} = 0{,}26214$.
Finalmente, não é tão pequena a probabilidade de que todos estejam com vírus.

EXEMPLO

Em quatro pessoas escolhidas ao acaso na multidão:

(a) Qual a probabilidade de que nenhum deles seja do signo de Aquário?

(b) Qual a probabilidade de que entre eles o número de aquarianos seja exatamente 2?

(c) Qual a probabilidade de que haja no mínimo 2 aquarianos entre os 4?

(d) Qual o número esperado de aquarianos entre os 4

Obs.: Admita que os 12 signos são equiprováveis.

Solução do Exemplo

O número X de aquarianos na amostra obedece a uma distribuição Binomial com n = 4 e p = 1/12. Então, usando a fórmula acima **ou recorrendo a um software estatístico** obtemos:

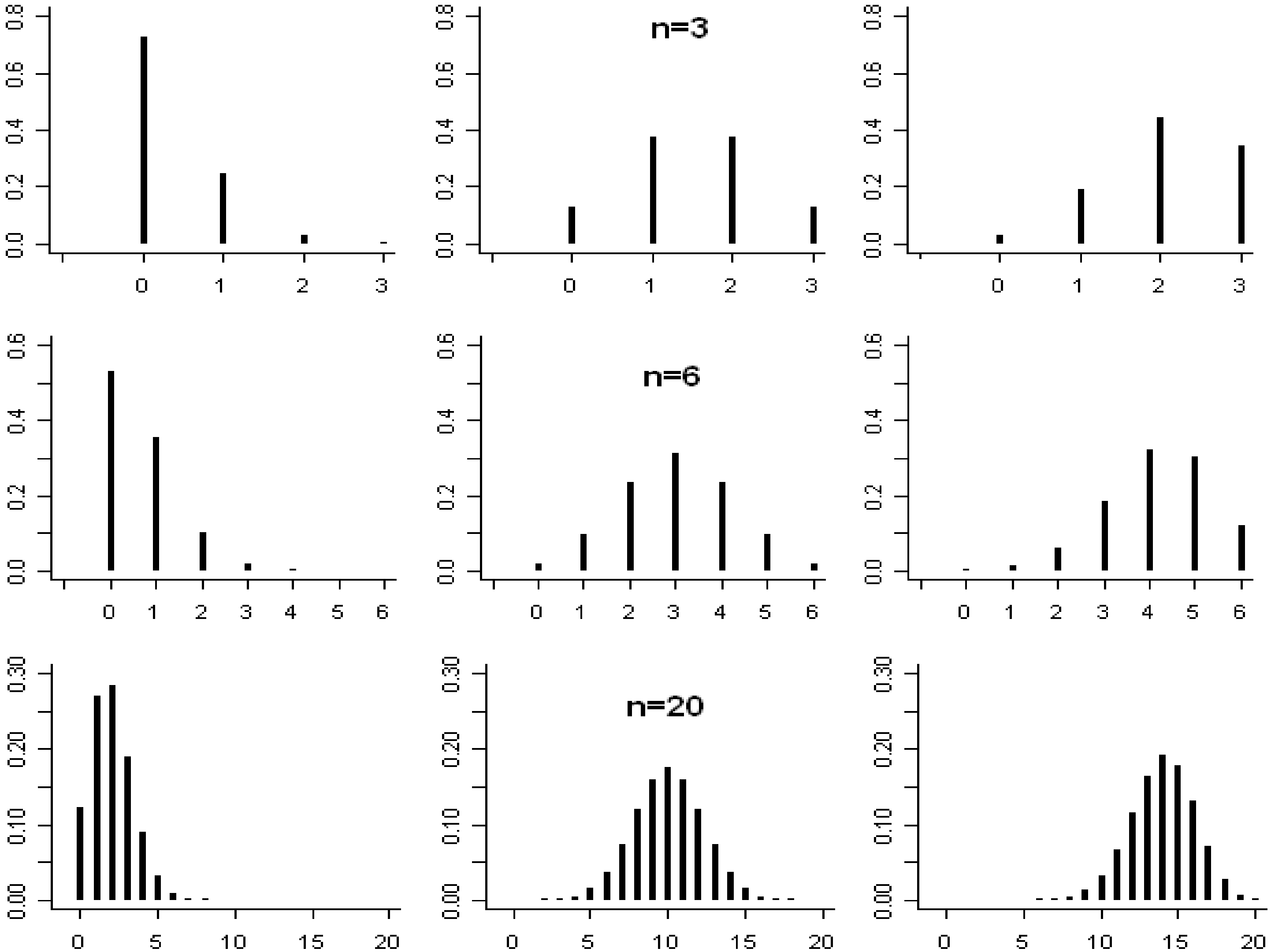
(a) $P(X = 0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^4 = \mathbf{0{,}70607}$

(b) $P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \mathbf{0{,}03501}$

(c) $P(X \geq 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^3\left(\frac{11}{12}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^4\left(\frac{11}{12}\right)^0 = 0{,}03718$

(d) E(X) = 4 . 1/12 = 1/3 = 0,333

Exemplo 2.12: A função de probabilidade da Binomial para vários n's e vários p's



p=0,1 p=0,5 p=0,7

Poisson

Dado λ, $\lambda > 0$, se a variável aleatória X pode assumir qualquer valor inteiro e não negativo k com probabilidade dada por

$$\boxed{P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}} \quad , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

diz-se que X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ.

Prova-se que neste caso $E(X) = \lambda$ e $var(X) = \lambda$.

Exemplo 2.16: **Algumas situações onde se aplica o modelo de Poisson**

a) Número de chamadas telefônicas que chegam a uma Central em um dado intervalo de tempo;

b) Número de navios que chegam ao cais de um porto em um dia;

c) Número de defeitos encontrados em uma geladeira recém fabricada;

d) Número de defeitos de acabamento por metro quadrado em uma chapa metálica;

e) Número de coliformes fecais em um mililitro de água;

f) Número de falhas por metro no recapeamento de um fio condutor de eletricidade.

Exemplo 2.17: **Falhas em um fio elétrico**

Admita que o número de falhas no recapeamento de um fio condutor de eletricidade obedece a uma distribuição de Poisson e que em média há 2 falhas por metro. Qual a probabilidade de que:

a) em um determinado metro de fio o recapeamento apresente 3 falhas?
b) em 7 metros de fio sejam encontradas no máximo 10 falhas?

Solução:

(a) Seja X a v.a. que representa o número de falhas num dado metro de fio. Então

$X \sim \text{Poisson}(2)$

Assim, $P(X=3) = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0{,}1804$.

(b) Neste caso a unidade de longitude considerada é 7 metros. Logo, para esta nova situação a taxa média por unidade é $\lambda = 2\times 7 = 14$.

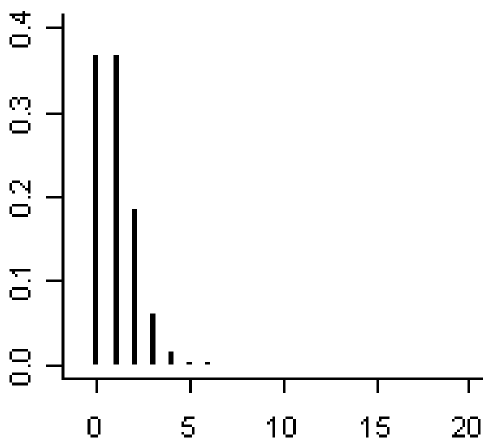
Obs.: Uma justificativa mais consistente para afirmações como esta será vista mais adiante, no Capítulo 6 (Soma de Poisson's independentes).

Se Y é a v.a. que representa o número de falhas nesses 7 metros de fio, é lícito considerar $Y \sim \text{Poisson}(14)$. Assim sendo,

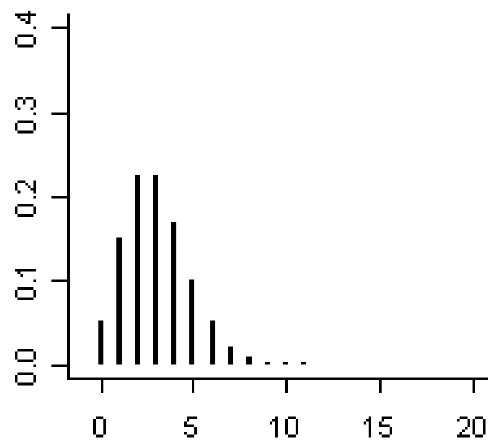
$$P(Y\leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-14}14^k}{k!} = 0{,}1757.$$

<u>Exemplo 2.18</u>: A função de probabilidade de uma Poisson

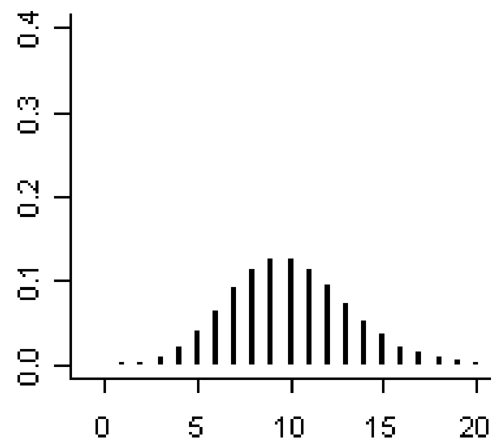
A figura a seguir exibe o gráfico das funções de probabilidade para uma distribuição de Poisson, sendo considerados três casos: $\lambda t = 1$, . $\lambda t = 3$ e $\lambda t = 10$



λt=1



λt=3



λt=10

<u>Exemplo</u> : Consultas ao site de uma empresa

Admita que o número de consultas à Home Page de uma determinada empresa durante um período de tempo obedece a uma distribuição de Poisson e que em média há 2 consultas por dia. Qual a probabilidade de que em um(a) determinado(a):

dia sejam feitas exatamente 3 consultas?

semana (7 dias) sejam feitas no máximo 10 consultas?

mês (30 dias) sejam feitas pelo menos 50 consultas?

<u>Solução:</u>

Em qualquer dos casos acima usaremos o modelo , onde $\lambda = 2$ e X é a variável aleatória que conta o número de consultas ao longo de t dias.

Aqui $t=1$ e $\lambda t = 2$. Então, = 0,1804.

Aqui $t=7$ e $\lambda t = 14$. Então, = 0,1757.

Aqui $t=30$ e $\lambda t = 60$.

Então, = 1 – 0,0844 = 0,9156.

Obs.: Note que, em um problema deste tipo, já que os cálculos envolvidos são bastante trabalhosos, é conveniente o uso do computador.

EXEMPLO

Admita que o número de consultas à Home Page de uma determinada empresa durante um mês obedece a uma distribuição de Poisson e que em média há 50 consultas por mês.

Qual a probabilidade de que em um determinado mês:

(a) sejam feitas pelo menos 40 consultas?

(b) sejam feitas pelo menos 50 consultas?

(c) sejam feitas pelo menos 60 consultas?

Resolução do Exemplo

Em qualquer dos casos acima o que se deseja é calcular

$\pi\ (K_o) = P\ [\ X \geq k_o\ ]$,

onde a variável aleatória X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ = 50 (já que a média de uma Poisson coincide com o valor do parâmetro λ). Então temos

$$\boxed{\pi(k_0) = P(X \geq k_0) = \sum_{k=k_0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{e^{-50}\, 50^k}{k}}$$

(a) π (40) = 0,94

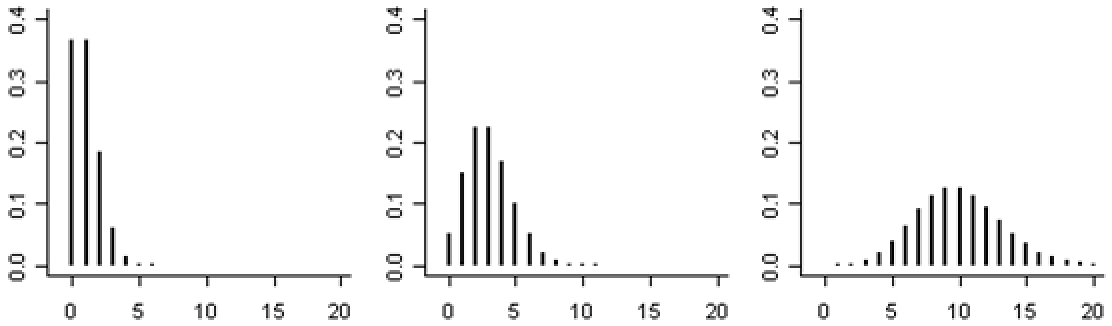
(b) π (50) = 0,52

(c) π (60) = 0,09

<u>**Obs.:**</u> Estas probabilidades podem ser obtidas recorrendo-se a um software que contenha a distribuição de Poisson acumulada.

<u>Exemplo 2.18</u>: A função de probabilidade de uma Poisson

A figura a seguir exibe o gráfico das funções de probabilidade para uma distribuição de Poisson, sendo considerados três casos: $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 10$



$\lambda = 1$ $\lambda = 3$ $\lambda = 10$

Aproximação da binomial pela Poisson

Em determinados casos, o modelo de Poisson é usado também como uma aproximação para o modelo Binomial. Se o nº de repetições **n for grande**, e **p for próxima de zero**, a probabilidade de ocorrência de um sucesso em cada ensaio de Bernoulli, diremos que estamos na presença de um **evento raro**.

Na prática, um evento será considerado raro quando o número de ensaios é, pelo menos, igual a 50 ($n \geq 50$) ao passo que **np é menor do que 5**. Nesse caso pode ser demonstrado que a distribuição binomial produz probabilidades muito aproximadas das obtidas através da distribuição de Poisson com $\lambda = np$.

Exemplo 2.19: Erro na transmissão de bits

Suponha que a probabilidade de um bit ser transmitido com erro, durante uma transmissão digital, é igual a 0,001. Determine a probabilidade de que, entre 3.000 bits transmitidos, em exatamente 4 deles tenha havido erro de transmissão.

Solução:

Seja X a variável aleatória representando o número de bits transmitidos com erro, dentre os 3000. Notemos que X é Binomial com n = 3000 e p = 0,001.

Como $n > 50$ e $np < 5$, podemos usar a aproximação pela Poisson.

Temos n= 3.000 e p = 0,001. Logo $\lambda = np = 3$.

Assim, $P(X=4) \approx \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0{,}1680$

O cálculo exato, usando a função de probabilidade Binomial, é 0,1681, ou seja, coincide com o valor obtido pela aproximação até a terceira casa decimal.